



Hur lärare i sin undervisning förhåller sig till matematiska förmågor i arbete med problemlösning

Therese Söfting Bergstedt

Camilla Bengtler

**Examensarbete 1, 15 hp
Läroprogrammet
Institutionen för individ och samhälle
Vårterminen 2015**

Arbetets art: Examensarbete 15 hp, lärarprogrammet

Titel: Hur lärare i sin undervisning förhåller sig till matematiska förmågor i arbete med problemlösning

Engelsk titel: How teachers in their teaching relates to mathematical competences in working with problem solving

Sidantal: 33

Författare: Therese Söfting Bergstedt och Camilla Bengtler

Examinator: Ann-Louise Petersen

Datum: Juni 2015

Sammanfattning

Inledning: Ämnet matematik har en framträdande roll i dagens läroplan och ämnet genererar stora diskussioner på både nationell och internationell nivå då svenska elevers resultat varit på nedgång under senare år enligt till exempel PISA (Programme for International Student Assessment) (Skolverket, 2013) och TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) (Skolverket, 2011b). Arbete med problemlösning är något som också inom ramen för dessa diskussioner fått stort utrymme då det enligt studier är en bra arbetsmetod för att få elever att resonera, diskutera och lyfta fram olika strategier på ett synligt sätt, för både dem själva och för läraren. Resonemang, diskussioner och strategier ingår i olika matematiska förmågor som är centrala att utveckla enligt den svenska läroplanens syftemål.

Syfte: Syftet med detta examensarbete är att undersöka hur lärare som genomgått kompetensutveckling i matematik arbetar för att utveckla elevers förmågor i matematik med utgångspunkt i problemlösning.

Metod: Vi har använt oss av kvalitativa metoder i form av observationer av lärare och elever i undervisning och därtill efterföljande intervjuer av de observerade lärarna. Detta för att kunna få en bild av hur verkligheten ser ut mot bakgrund av vårt forskningssyfte. Vi genomförde observationerna utifrån ett observationsschema som vi sammanställde för att säkerställa att vi observerade samma fenomen, då vi genomförde observationerna var för sig med varsin lärare.

Resultat: Vårt resultat visar att de observerade lärarna arbetar med problemlösning på ett sådant sätt att alla våra observerade förmågor fick färdighetstränas av eleverna. Dock skiljde sig lärarnas fokus på förmågorna i viss utsträckning. Det framkom även att Matematiklyftet gett lärarna mer självförtroende i undervisning genom problemlösning. Resultatet visar också att eleverna och deras lärare har en positiv attityd till problemlösning.

Nyckelord: Problemlösning, matematiska förmågor, kommunikationsförmåga, begrepps-förmåga, resonemangsförmåga, Matematiklyftet.

Innehåll

Sammanfattning	2
Inledning.....	1
Syfte och frågeställningar.....	2
Läroplanen.....	3
Forskningsöversikt	4
Problemlösning.....	4
Matematiska förmågor	5
Kompetensutveckling	9
Metod	9
Urval.....	10
Observation	10
Intervju	11
Datainsamling och bearbetning	12
Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet.....	13
Forskningsetiska principer	14
Resultat och analys.....	14
Observationer	15
Intervju	23
Sammanfattande resultat och analys	26
Diskussion	27
Metoddiskussion.....	27
Resultatdiskussion.....	28
Förslag till vidare forskning	30
Referenser.....	30
Bilagor	

Inledning

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhällsliga, sociala och tekniska utvecklingen. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocess. (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11, skolverket 2011a, s.62).

Matematik är ett av kärnämnen i skolan och tar således stor plats i undervisningen. Utifrån den ovan citerade beskrivningen ur läroplanen om matematik, kan man förstå att problemlösning och arbetet med förmågorna borde få mycket utrymme i matematikundervisningen. Men att arbeta med problemlösning i klassrummet tar tid och vår erfarenhet av detta i likhet med Taflins (2007) erfarenhet är att många lärare inte anser sig kunna avsätta denna tid på planering och genomförande av problemlösningsektioner.

Enligt rapporter från senaste PISA-undersökningen (Programme for International Student Assessment) (Skolverket, 2013), kan man se en nedåtgående trend bland svenska elevers matematikkunskaper. TIMSS rapport (Trends in International Mathematics and Science Study) (Skolverket, 2011b) visar på samma negativa trend i matematikkunskaper för svenska elever. Den visar också att många svenska lärare är mer missnöjda med sin arbetssituation än lärare från andra länder i undersökningen. Det framgår dock inte vari missnöjet ligger hos de svenska lärarna. Vidare talar rapporten om att denna negativa kunskapstrend går att vända, men att det kräver engagemang från såväl lärare som elever. TIMSS (2011b) beskriver svenska lärare som välutbildade men att de får mindre kompetensutveckling än många andra länders lärare.

I Skolverkets text om matematik rapporteras det att de nationer som ligger bra till i undersökningar som görs angående elevers matematikkunskaper, oftast baserar sin undervisning på just problemlösning. Skolverket menar att problemlösning som innehåller många nivåer av kvalitativa inslag, ger alla elever oavsett kunskapsnivå utmaningar att lära sig mer matematik. (Skolverket, U.å.).

Lgr 11 lyfter fram problemlösningen som en central del av matematikundervisningen. Med grund i läroplanen och utifrån de rapporter som talar positivt om problemlösning för utveckling av matematikkunskaper, har vi valt att undersöka hur lärare som genomgått kompetensutveckling med grund i problemlösning arbetar för att höja elevernas kunskaper inom matematik. Då framför allt hur de arbetar för att utveckla elevernas resonemangs- begrepps- och kommunikationsförmåga och om Matematiklyftet som är en kompetensutveckling för aktiva lärare inom matematik, varit till någon hjälp för dem i deras undervisning inom problemlösning.

Syfte och frågeställningar

Syftet med detta examensarbete är att undersöka hur lärare som genomgått kompetensutveckling i matematik arbetar för att utveckla elevers förmågor i matematik med utgångspunkt i problemlösning. Vi har utifrån syftet formulerat följande forskningsfrågor som utgångspunkt för vår studie:

- På vilket sätt erbjuds eleverna att arbeta med olika uttrycksformer och strategier i undervisningen?
- Hur synliggör och diskuterar läraren olika matematiska begrepp?
- På vilket sätt erbjuds eleverna att enskilt och tillsammans resonera kring olika tillvägagångssätt i arbetet med problemlösning?

Läroplanen

Flera forskare menar att problemlösning är en bra arbetsmetod för att utveckla förmågorna i matematik, detta kommer att lyftas fram ytterligare i forskningsöversikten. Även Lgr 11 lyfter fram problemlösning som en bra arbetsmetod för att färdighetsträna förmågorna. Kursplanen i matematik lyfter fram problemlösning som centralt i undervisningen. I Kommentarmaterial till matematik (2011) framgår det att problemlösning handlar om att kunna använda olika begrepp och uttrycksformer för att kunna resonera om och kring matematik, man ska också kunna reflektera över rimligheten i resultaten av uträkningar. Att kunna se att det finns flera lösningar på samma problem är ett sätt att förstå problemlösning (Kommentarmaterial till matematik, 2011).

Lgr 11 presenterar fem förmågor som man bör arbeta med i matematiken. Vi har valt att utgå från tre av dessa förmågor i vår studie. De förmågor vi valt är begreppsförmågan, kommunikationsförmågan och resonemangsförmågan. De övriga förmågorna är problemlösningförmågan och procedurförmågan. Alla förmågor finns var och en representerade i syftemålen i Lgr 11 som varsin att-sats. De presenteras i ordningen problemlösningförmågan, begreppsförmågan, procedurförmågan, resonemangsförmågan och kommunikationsförmågan:

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang, och
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (Lgr 11, s 63)

Vårt val av förmågor bör inte ses som sådant, att de utvalda förmågorna är överordnade övriga förmågor, alla förmågor flätas samman och är beroende av varandra vilket framkommer i forskningsöversikten samt övriga delar av arbetet. Valet av förmågor beskrivs mer detaljerat under rubriken urval.

Forskningsöversikt

Under detta avsnitt kommer vi att beskriva tidigare forskning om problemlösning och de olika förmågorna i matematiken. Problemlösningsförmågan och de tre förmågor vi valt att observera kommer vi att beskriva under egna rubriker. Vi väljer att inte lyfta fram procedurförmågan i forskningsöversikten då den utifrån vårt syfte inte är relevant. Valet att lyfta fram och beskriva problemlösningsförmågan motiveras med att den förmågan har två väsentliga syften i arbetet med problemlösning och övriga förmågor, vilket kommer att beskrivas nedan.

Problemlösning

Hagland, Hedrén och Taflin (2005) menar att eleverna själva blir motiverade genom att arbeta med problemlösning, då de själva blir medvetna om olika kunskaper de kan behöva för att kunna lösa olika problem. Med ett problem avses en uppgift som eleverna inte direkt har en klar lösning på, det ska alltså inte vara en så kallad rutinuppgift. Enligt Taflin (2007) innebär en rutinuppgift att eleverna redan är bekanta med lösningssättet, vilket innebär att lösningen av uppgiften endast är färdighetsträning och medför inga svårigheter för eleverna att lösa. Helenius (2006) beskriver ett problem som sådant att en elev måste göra någon form av undersökning för att komma fram till en lösning. En uppgift kan vara ett problem för en elev men en rutinuppgift för någon annan. Enligt Palm, Bergqvist, Eriksson, Hellström och Häggström (2004) är definitionen av begreppet problem något oklar. Palm och hans kollegor menar dock att för att ett problem "ska vara en skapande aktivitet" (s.4) som eleverna inte kan lösa på rutin, måste det innebära att lösningsmetoden inte är uppenbar för den som står inför uppgiften.

För att ett problem ska få kallas "rikt problem" (Taflin, 2007. s. 11) menar Taflin att sju kriterier måste uppfyllas. Ett problem kallas rikt när det kan hjälpa eleverna att få en mer utvecklande matematikundervisning. Dessa kriterier är:

1. Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer.
 2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
 3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
 4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika matematiska idéer och representationer.
 5. Problemet ska kunna initiera till matematiska resonemang utifrån elevernas skilda lösningar, ett resonemang som visar på olika matematiska idéer.
 6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare.
 7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.
- (Taflin, 2007. s. 11-12)

Barn har enligt Kilpatrick, Swafford och Findell (2001) matematiska kunskaper med sig till skolan och som lärare bör man räkna in dessa förkunskaper vid val av matematiskt problem, detta påpekar även Häggblom (2013). Häggblom menar att om vi inte är medvetna om elevernas kunskaper finns det risk att vi lägger undervisningen på för låg nivå, vilket hon tror kan ha betydelse även längre upp i elevernas matematikinläring. Ahlberg (1995) säger att man genom att välja olika typer av problem som kopplas till vardagen, kan behålla elevernas nyfikenhet och glädje för matematiken. Hon menar att risken med att endast arbeta med uppgifter i matematikboken, kan få eleverna att känna att de inte har någon nytta av sina matematiska kunskaper annat än i skolan. Det finns en risk att eleverna glömmer sina förkunskaper och därmed glömmer bort kopplingen till vardagen. Matematiken blir något som endast handlar om att lösa uppgifter i matematikboken (Ahlberg, 1995).

Hagland m.fl. (2005) menar att läraren kan behålla arbetsglädjen inom matematiken genom att använda sig av varierad problemlösning som är anpassad efter eleverna. Lester (1996) menar att elever måste få känna att läraren är positivt inställd till problemlösning, han menar att lärarens inställning smittar av sig på eleverna.

Att välja ut problem som passar alla elever i en klass är viktigt menar Taflin m.fl. (2005) men inte helt lätt. De menar också att det är viktigt att alla elever har nytta av problemet för sin matematikutveckling, för att uppnå detta är det framför allt tre krav som ställs på problemet. Dessa är för det första att eleverna ska få arbeta med olika strategier och att de får lära sig nya matematiska begrepp. Det är för det andra viktigt att texten är lätt för alla elever att förstå och tyda men det ska samtidigt vara utmanande och väcka elevers nyfikenhet och lust att lösa det givna problemet (Taflin m.fl. 2005). Polya (2003) menar att i första hand måste eleverna förstå det problem de ställs inför och att problemet samtidigt måste vara intressant och relevant för att eleverna ska vilja hitta en lösning på det. Problemet måste enligt Taflin m.fl. (2005) slutligen kräva ansträngning från eleverna och därför måste det tillåtas ta tid att lösas. Även Vygotskij (2001) och Polya (2003) talar om att problemlösningssprocessen måste få ta tid.

För att eleverna ska orka arbeta med ett problem under en längre tid och för att öka deras motivation till problemlösning, menar Stenlund Fridell (2015) att det är bra att arbeta med problem som är förankrade i vardagen. Detta gör matematiken mer verklig för eleverna säger han. Han påpekar också att man genom att välja problem där eleverna själva, utan instruktioner från läraren, måste hitta rätt arbetssätt, fakta och kunskaper för att komma fram till en lösning, stärker deras självförtroende och förståelse. Att eleverna samtidigt får samtala och resonera med varandra hjälper dem att befästa kunskaperna ytterligare menar han.

En viktig del av problemlösningen är att kunna hitta och växla mellan olika strategier, alltså tillvägagångssätt, för att arbeta fram en lösning. Många lärare ger inte sina elever så många strategier som rekommenderas av NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Av de 70 tillfrågade lärarna var det endast 50 som lärde ut minst en av strategierna men endast två av lärarna lärde ut fyra stycken av de nio föreslagna (Bruun, 2013). Två vanliga strategier är enligt Bruun (2013) att låta eleverna leta nyckelinformation i texten och rita fram sin lösning. Andra exempel på strategier kan vara att arbeta baklänges, söka mönster, gissa och pröva, lösa ett enklare problem, göra en lista, dramatisera situationen, arbeta med laborativt material med flera (Lester, 1996, i Taflin, 2007).

Ahlberg (1995) belyser vikten av att låta yngre elever arbeta med problemlösning i större utsträckning än ur matematikboken, detta för att ta till vara på och utveckla deras förkunskaper i matematik. Kilpatrick m.fl. (2001) talar om att yngre elever har stor förmåga att **ta sig** an ett matematiskt problem **utifrån olika infallsvinklar**. De menar också att eleverna redan tidigt klarar av att använda olika matematiska begrepp, kommunicera och resonera om matematiska problem och lösningar på dessa.

Matematiska förmågor

Idag, både nationellt och internationellt, ligger fokus i styrdokumenterna på att utveckla matematiska förmågor (även kallat kompetenser) för att uppnå kunskapskraven i matematikämnet (Palm m.fl., 2004 och Rystedt & Trygg, 2013). Dessa förmågor används inom alla grenar av matematiken (Palm m.fl. 2004). I Lgr 11 benämns dessa förmågor som problemlösningsförmågan, resonemangsförmågan, begreppsförmågan, kommunikations- och procedurförmågan. De Lange (2003) talar om matematisk literacitet, han menar att just förmågorna är det viktiga för att utveckla så kallad matematisk literacitet, för att behärska och kunna använda matematiken fullt ut krävs alla fem förmågorna. Vid Umeå universitet har Palm m.fl. (2004) tagit fram PM 199 som beskriver förmågorna utefter deras tolkning. KOM-gruppen i Danmark har utarbetat åtta förmågor, som enligt Palm m.fl. (2004) liknar de förmågor som författarna tolkat fram ur de svenska styrdokumenterna. Enligt Rystedt och Trygg (2013) fanns förmågorna ur KOM-rapporten i åtanke vid skapandet av Lgr11. Kilpatrick m.fl. (2001) lyfter också de fram fem förmågor, adaptive reasoning, strategic competence, conceptual understanding, productive disposition och procedural fluency. Palm m.fl. (2004) argumenterar för att förmågorna må ha olika namn beroende på var och vilka som tolkat dem, men i stort kan de sägas betyda samma saker och belyser samma sak, oavsett hur många förmågor som finns beskrivna. Det är viktigt att ha förmågorna för att kunna arbeta med olika delar i matematiken. De Lange (2003) menar också att dessa förmågor, eller snarare matematisk literacitet kan hjälpa till att förstå vardagslivet och den vardagsnära matematiken bättre och att matematiken då blir användbar även utanför skolan i högre grad.

Ingen förmåga är bunden till någon speciell del av matematiken (Skolverket, 2011b). Skolverket (2011b) påpekar att alla förmågor överlappar varandra och Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver att förmågorna flätas samman och är beroende av varandra. Juter (2014) säger också att förmågorna inte kan ställas upp i någon speciell rangordning, utan menar att de under utvecklingen överlappar och lyfter fram varandra. Hon menar att förmågorna ställda var för sig, endast visar olika matematiska kunskaper. Juter förklarar vidare att förmågorna kan vara olika beskrivna i olika läroplaner men att Skolverket har valt att lyfta fram fem förmågor för grundskolan.

Sammanflätningen av förmågorna menar Kilpatrick m fl (2001) har betydelse för hur eleverna lär matematik. Det finns enligt dem inte något matematiskt problem som endast färdighetstränar en av förmågorna, de menar vidare att man måste öva på fler förmågor samtidigt för att det ska få betydelse för elevens lärande och genom användning av problemlösning i matematik får eleverna möjlighet till detta. Ahlberg (1995) och Polya (2003) påpekar att det därför är viktigt att välja rätt typ av problem för att eleverna ska utveckla sina förmågor på bästa sätt.

Problemlösningsförmågan

Problemlösningsförmågan är en viktig del i arbetet med problemlösning. Man kan enligt Juter (2014) dela in förmågan i två delar. Den ena delen är att eleverna tränar upp förmågan genom att använda den som redskap för att träna på olika strategier för att lösa problem. Den andra delen är att använda förmågan som utgångspunkt för att öva på övriga förmågor. Juter menar vidare att genom att träna på problemlösningsförmågan, kan eleverna använda sina erfarenheter på ett sådant sätt att de lättare kan kommunicera olika begrepp och lösningsstrategier. Problemlösningsförmågan handlar också om att eleven själv ska kunna formulera olika matematiska problem såväl som lösa problem gjorda av andra (Rystedt & Trygg, 2013).

Skolverket menar i sin text om ämnet matematik att problemlösningsförmågan innebär att man använder sig av olika strategier för att aktivt komma fram till en lösning, genom tolkning, analys och resonemang kunna komma fram till om resultatet är korrekt. Skolverket menar att en bra metod för att träna på problemlösningsförmågan är att enskilt få tänka ut olika lösningsstrategier, sedan diskutera, analysera och värdera dessa lösningar tillsammans med andra. (Skolverket, U.å.).

Kommunikationsförmågan

Kommunikationsförmågan handlar enligt Juter (2014) om att eleven ska “kunna använda symboler, grafer, matematiska termer, ord, bilder, modeller och andra representationer” (s. 2) för att kunna kommunicera matematik. Säljö (2014) menar att människan lär känna sin omvärld genom de redskap vi har tillgängliga. De redskapen kan bland annat vara fysiska redskap så som linjal, papper och penna men även språk och interaktion med varandra. Han menar att man måste öva praktiskt och att elever behöver många olika typer av redskap (strategier) för att befästa kunskapen.

Enligt tolkningen av Palm m.fl. (2004) handlar kommunikationsförmågan om både kompetens inom tal och skrift, såväl som att eleven själv ska kunna “framföra information med matematikens språk” (s. 8) men också vara förmögen att kunna förstå det någon annan framför. Rystedt och Trygg (2013) framhåller även de att kommunikationsförmågan handlar om att kunna “kommunicera i, med och om matematik” (s. 60) och beskriver precis som Palm m.fl. (2004) att eleverna dels ska kunna tolka andras beskrivningar (muntliga, skriftliga eller visuella) men också själva kunna förmedla matematiskt innehåll på passande nivå. Häggblom (2013) framhäver den muntliga kommunikationen som ett sätt att synliggöra elevernas resonemang för både sig själva och de som lyssnar. En viktig detalj i kommunikationsförmågan menar Rystedt och Trygg (2013) är att någon form av informationsutbyte sker mellan minst två personer.

Figuren, framtagen av Taflin (2007) med inspiration av McCoy m.fl. (1996) visar olika representationsformer, som ger eleverna möjlighet att lösa problem på olika sätt och att på ett enkelt sätt visa sina olika lösningssätt.

<p style="text-align: center;">Konkret representation</p> <p>Eleven redovisar med konkret material sin lösning, till exempel klossar, tändstickor, knappar med mera. Till exempel tre staplar med två klossar i varje stapel.</p>	<p style="text-align: center;">Logisk/språklig representation</p> <p>En muntlig eller skriven beskrivning av elevens lösning. Ej med matematiska symboler. Till exempel “tre multiplicerat med två är lika mycket som sex”.</p>
<p style="text-align: center;">Aritmetisk/Algebraisk representation</p> <p>Här representeras lösningen med matematiska symboler och uträkningar. Till exempel $3 \cdot 2 = 6$.</p>	<p style="text-align: center;">Grafisk/Geometrisk representation</p> <p>Eleven ritat en bild (rutnät, tabell med mera) som representerar lösningen. Till exempel tre runda ringar med två mindre ringar i varje stor ring.</p>

Figur 1.

Begreppsförmågan

Enligt Juter (2014) handlar begreppsförmågan om att elever ska kunna beskriva olika begrepps egenskaper utifrån sammanhanget det befinner sig i. Hon säger också att eleven ska ha kunskaper om begrepps förhållande till varandra. Vidare ska elever kunna använda dessa begrepp i olika uträkningar. Palm m.fl. (2004) menar att begreppsförmågan handlar om att vara förtrogen med olika, inom matematiken, relevanta begrepps definitioner och användningen av dem. Vidare menar de att ett begrepp ofta är beroende av ett annat och att en god begreppsförmåga är viktig för att komma vidare inom matematiken.

I samband med begrepps bildning menar både Vygotskij (2001) och Häggblom (2013) att det är viktigt att använda både relevanta material och ord. Vygotskij (2001) menar också att elever genom problemlösningsprocessen lär sig att använda nya, obekanta ord i betydelsefulla sammanhang och på så sätt bildar de nya begrepp och får en djupare begreppsförståelse. Han menar vidare att för att eleverna ska klara det måste tanken och ordet, alltså samtalen, få en stor del i undervisningen.

Resonemangsförmågan

Enligt Palm m.fl. (2004) innebär resonemangsförmågan bland annat att kunna granska kritiskt, ställa bevis mot varandra och föra matematiska argumentationer runt detta. Den kräver vidare att eleverna kan föra diskussioner grundat på matematisk-logiskt tänkande (Häggblom, 2013), att de kan dra slutsatser på grundval av teorier som prövats. Juter (2014) menar att man genom arbete inom problemlösning kan träna på denna argumentation med hjälp av begrepp och procedurer. Genom en medvetet riktad undervisning i syfte att utveckla resonemangsförmågan menar Häggblom (2013) att en grund för mer formell bevisföring läggs.

Språket är enligt Vygotskij (2001) avgörande för lärandet. Utan socialt samspel menar han att människan inte kan utveckla sin begreppsvärld till fullo. Han menar att en elev som arbetar ensam endast kan uppnå kunskaper till en viss nivå. Om samma elev däremot, arbetar tillsammans med andra eller med stöd av en lärare kan den nå sin proximala utvecklingszon. Ahlberg (1995) säger att man kan uppnå detta sociala samspel genom att låta elever arbeta med problemlösning i små grupper. Då får eleverna möjlighet att arbeta med flera olika förmågor, bland annat resonemangsförmågan. Detta görs genom att eleverna måste granska varandras lösningar, lyssna på sina kamraters resonemang och argumentera för och försvara sin egen lösning. Vygotskij (2001) menar att elever som samarbetar till slut gör sina kamraters kunskaper till sin egen, de internaliserar. Ahlberg (1995) säger att elever genom grupparbete kan göra samma internalisering av kunskapen som Vygotskij talar om.

En viktig aspekt inom en utvecklad resonemangsförmåga enligt Häggblom (2013), är att elevens felaktiga tankegångar kan synliggöras lättare. Vidare menar hon att genom detta möjliggörs nya sätt att stödja eleverna i deras lärande. En fungerande arbetsmetod som används för att utveckla framför allt resonemangsförmågan är enligt Svanelid (2014) EPA-metoden (eget tänkande, partänkande och alla tillsammans). Han menar att denna metod ger eleverna möjlighet att resonera med sig själva och andra om sina strategier och lösningar, den utvecklar även förmågan att se andras strategier och förmågan att argumentera för sina egna lösningar. Trots den påfallande likheten mellan resonemangsförmågan och kommunikationsförmågan poängterar Rystedt och Trygg (2013) att dessa skiljer sig åt med avseende på att kommunikation är något som sker mellan minst två personer, ett resonemang kan däremot föras på enskild nivå.

Kompetensutveckling

Då vi valt att observera lärare som genomgått kunskapsutveckling inom matematik, väljer vi att under denna rubrik kort lyfta fram och förklara vad Matematiklyftet innebär.

Kilpatrick m.fl. (2001) talar om att lärare måste få chansen att vidareutveckla sina matematikkunskaper och Sakshaug och Wohlhuter (2010) konstaterar att lärare som själva genomgått kompetensutveckling i problemlösningsarbete, blev mer bekväma i att använda detta som undervisningsmetod tillsammans med sina elever och fick också större förtroende för sina elevers möjligheter och förmågor att lösa problem.

Bruun (2013) redogör för att flera lärare uttrycker intresse för vidare utveckling (kompetensutveckling) i hur man undervisar i problemlösning. 2012 gjorde Skolverket en kunskapslyftande satsning för lärare som undervisar i matematik, Matematiklyftet (Skolverket, 2012). Denna vidareutbildning erbjuds alla lärare som undervisar i matematik. "Syftet med Matematiklyftet är att förbättra elevernas kunskaper i matematik, att öka deras måluppfyllelse. Fortbildningen ska ge deras lärare tillfälle att utveckla sina kunskaper om undervisningsmetoder och på så sätt stärka kvaliteten i undervisningen." (Skolverket, 2012b). Inom Matematiklyftet finns en särskild modul som behandlar problemlösning. I denna del får lärarna veta mer om matematiska problem och hur det kan påverka elevers lärande att arbeta med problemlösning. Det beskrivs även hur förmågorna kan lyftas fram med hjälp av problemlösning. I Matematiklyftet lägger man också vikt vid hur resonemang om strategier och uttrycksformer kan ge lärdom hos eleverna. (Skolverket, 2014).

Metod

Under följande avsnitt kommer vi att beskriva och motivera vårt val av metod. Vi kommer vidare att beskriva vårt urval av lärare samt klasser att observera och hur vi samlade in data och bearbetade denna. Vi diskuterar även begreppen reliabilitet, validitet och generaliserbarhet. Slutligen kommer en redovisning av de forskningsetiska principer vi tagit hänsyn till i vårt arbete.

Vid val av forskningsmetod menar Starrin och Svensson (1994) att frågeställningen i syftet med undersökningen, styr vilken metod man väljer. Då vårt intresse och syfte utgår från att se hur arbete med problemlösning ser ut i verksamheten, har vi valt att göra en kvalitativ undersökning bestående av observationer och efterföljande lärarintervjuer för att, om möjligt, kunna komma åt en varierad och sanningsenlig bild av verkligheten. Repstad (2007) menar att kvalitativa metoder och då framför allt observationer, handlar om att lyfta fram det tysta och underförstådda i ett fenomen eller en företeelse.

Det är viktigt att, enligt Schütz i Claesson (2009), aktivt söka förståelse i det observerade, vilket till exempel kan göras med hjälp av intervjuer. Med samtal kan olika förgivettaganden belysas från olika håll och ytterligare förståelse för en viss situation kan fås (Claesson, 2009). Repstad (2007) menar att genom att använda sig av kompletterande intervjuer efter observationer kan man lyfta fram individens uppfattning och tankar kring fenomenet som observerats. Han menar vidare att genom att använda sig av kvalitativa metoder i form av observationer och intervjuer, riktar sig intresset mot den individen och inte mot en hel grupps åsikter och tankar om fenomenet.

Repstad (2007) menar att genom att använda sig av två metoder i sin undersökning, blir det lättare att samla in större mängder data som sedan analyseras. Man kan även välja att kombinera en kvantitativ och en kvalitativ metod, men då vårt urval endast bestod av två lärare och två grupper med elever alltså en avgränsad och specifik miljö, ansåg vi oss inte behöva använda oss av andra metoder än de kvalitativa i form av observation och intervju. Eriksson-Zetterquist och Ahrne (2011) menar att när man kombinerar observationer med intervjuer kan man genom svaren i intervjun se om de tolkningar man gjort under observationen verkar rimliga.

Urval

Vi valde att göra tre observationer var i två olika klasser, sammanlagt sex observationer. Detta för att få ett större urval till datainsamlingen. Den ena skolan vi besökte ligger i Västsverige, en kommunal F-9 skola där observationerna skedde i en årskurs 4 med 23 elever i klassen. Den andra skolan är en liten svensk privatskola F-6 som ligger i södra Spanien. Skolan är bunden till det svenska skolsystemet och följer därmed samma styrdokument som övriga svenska skolor. Den har åldersintegrerade klasser där observationerna ägde rum i en klass med 15 elever som går i förskoleklass och årskurs 1. Problemlösningen gjordes endast av årskurs 1 med sju elever. Vi delade på oss och gjorde observationer och intervjuer på var sin skola, detta berodde på att en av oss för tillfället bodde i Spanien och då inte hade möjlighet att göra empirin på en skola som var placerad i Sverige.

Vårt urval av lärare baserade sig på att de genomgått Matematiklyftet med modulen problemlösning. Vi ville ta reda på hur lärare som genomgått Matematiklyftet lyfter fram förmågorna under arbetet med problemlösning, hur de tänker kring planering och genomförande av problemlösningslektioner samt om de själva anser att kunskapslyftet fått dem att ändra undervisningsstrategi när de arbetar med problemlösning. Tanken var att göra observationerna i samma årskurs, men vårt urval begränsades av att vi ville att lärarna genomgått Matematiklyftet. Det gjorde att de lärare som till slut fanns tillgängliga för både observation och intervju undervisade i olika åldersgrupper. Läraren i årskurs 4 har varit verksam i två och ett halvt år och är utbildad för årskurs F-6 med ämnesinriktning NO, svenska och matematik, men har även läst till teknik och 15 högskolepoäng extra i matematik med inriktning mot didaktik. Läraren i årskurs F-1 är utbildad tidigarelärare 1-6 med ämnesinriktning matematik, NO, svenska och svenska som andraspråk och har även läst en extra kurs i bedömning.

Observation

Som vi tidigare har beskrivit ville vi försöka se hur undervisningen i matematik och inom problemlösning ser ut i verkligheten. Detta för att försöka se om Matematiklyftet verkligen hjälper lärarna i sin undervisning. Vi valde att genomföra en strukturerad observation. Detta innebär enligt Patel och Davidson (2011) att det är viktigt att vara väl insatt i ämnet och att genom frågeställningarna veta exakt vad man är intresserad av att observera. Patel och Davidson (2011) beskriver observationer som användbara i situationer när man som observatör vill få en direkt insyn i verkligheten.

Det finns flera olika tillvägagångssätt när man gör en observation. Vi valde att göra en så kallad öppen observation, det innebar att vi berättade för våra lärare vad vi arbetade med och vilken typ av lektion vi ville observera. Detta behöver enligt Repstad (2007) inte betyda att man delger alla detaljer om vad man faktiskt kommer att titta efter. Han menar också att det, trots att man kan välja att hålla detaljer om observationen dold, är viktigt att man följer de forskningsetiska riktlinjer som säger att deltagarna i undersökningen har rätt att få information om syftet med undersökningen, då detta ger dem en chans att ge sitt samtycke till att delta i undersökningen. Vi valde att dölja vilka förmågor vi avsåg att observera. Vi informerade inte heller lärarna om vår avsikt att se om de nämnde olika strategier och förmågor i undervisningen. Detta för att vi inte ville påverka deras sätt att utföra undervisningen då det var själva syftet med vårt arbete, att försöka se hur lärare faktiskt arbetar med elever under problemlösningsektionerna. Repstad (2007) menar att observationer är att studera människor i verkliga situationer som de interagerar i och genom dessa observationer bilda sig en uppfattning i hur de agerar i utvalda situationer.

Det finns vissa risker med att endast göra sina analyser utifrån det material man samlat in under observationer enligt Repstad (2007). Det finns en risk att materialet nyanseras av de tolkningar som forskaren gör med hjälp av den observerades uttryck och gester. Repstad påpekar att det kan finnas en risk att dessa tolkningar kan vara felaktiga, då människor oftast inte är helt medvetna om sitt minspel och kroppsspråk. Han fortsätter med att säga att forskaren inte heller vet vad som ligger bakom dessa uttryck och att det då kan bli en misstolkning av situationen. Genom att använda sig av observationer kombinerat med intervjuer menar Repstad (2007) att man kan undvika sådana missförstånd eftersom man i intervjun får möjlighet att ställa frågor och även eventuella följdfrågor kring olika situationer och uttalanden, vilket gör att det som observerats kan ses ur en annan synvinkel.

När möjlighet fanns var den andre av oss med på observationerna via Skype. Vid de två sista observationerna i Spanien kunde vi båda delta och vid den andra observationen i Sverige. Vi ställde då upp våra surfplattor för att den andra skulle kunna se så mycket som möjligt av klassrummet. I början av lektionen och under elevernas eget arbete ansåg vi att det var viktigare att se eleverna då läraren ändå hördes och rörde sig runt i klassrummet. Mot slutet av lektionerna när arbetet framförallt skedde framme vid tavlan vände vi surfplattorna mot den delen av klassrummet. Vi valde att använda den bakre kameran, så eleverna inte kunde se den person som satt på andra sidan skärmen, vi tänkte att de på det viset distraherades minimalt. Fördelen med att kunna vara med via Skype var att vi då kunde stötta varandra under det gemensamma analysarbetet. Genom att använda Skype ser man händelser i nuet, det finns alltså inga möjligheter att spela in observationerna med detta medel. Däremot valde vi att göra en ljudupptagning av observationerna.

Intervju

För att få en bredare bild och ringa in våra forskningsfrågor ordentligt valde vi att intervjua de lärare vi observerat. Frågorna (se bilaga 1) syftar till att komma åt lärarnas syn på problemlösning som undervisningsmetod och deras tankar om Matematiklyftet och vad de anser att Matematiklyftet gett dem. Vi hade inte för avsikt att generalisera lärarnas svar *till något allmängiltigt* utan precis som lyfts fram av Kvale och Brinkmann (2014) är intervju svaren subjektiva, det var deras tankar vi ville komma åt. Detta kan inte göras genom enbart observationer, men det kan ge oss verktyg att på ett mer korrekt sätt analysera det vi observerat. Vi kan inte heller komma åt hur lärarna eventuellt ändrat sitt arbetssätt genom enbart observationer. Kvale och Brinkmann (2014) menar också att intervjuer är en bra metod när forskningsämnet inbegriper mänsklig erfarenhet.

Det är i en intervjusituation viktigt att, för att säkerställa reliabiliteten i intervjusvaren och undvika en ofullständig och osann tolkning, ställa följdfrågor som verkligen ringar in intervjupersonernas svar (Kvale & Brinkmann, 2014). Att genomföra intervjuer menar Eriksson-Zetterquist och Ahrne (2011) är ett sätt att få inblick i olika miljöer och kontexter. Genom intervjuer samlas data in från enskilda individer som ingår i de sociala förhållanden som forskningsfrågorna ramar in. De menar även att det krävs mycket planering innan man gör intervjun på grund av att det krävs att intervjufrågorna verkligen ramar in det man är intresserad av att veta. Det är viktigt att intervjufrågorna är grundade utifrån syftet i forskningen.

Att göra en kvalitativ intervju, innebär enligt Eriksson-Zetterquist och Ahrne (2011) att man innan intervjun kan välja vilka och hur många frågor man ska ställa. De menar att man inte är lika bunden till sitt frågeformulär utan kan välja när och hur frågorna ska ställas, detta ser de som en fördel mot att vara bunden till ett frågeformulär. Vi valde dock att färdigställa ett frågeformulär som vi utgick från när vi genomförde våra intervjuer. Detta för att, i den mån det gick, vara säkra på att vi fick svar på samma saker. Frågorna vi formulerade var formade utifrån vårt syfte. Vi kunde däremot vara flexibla med följdfrågor och därigenom få en bredare bild av vad varje enskild lärare ansåg om de fenomen som frågorna berörde. Vid intervjutillfällena var endast en av oss närvarande med respektive lärare, Skype användes således inte vid dessa tillfällen. Vi valde att göra en inspelad ljudupptagning vid båda intervjuerna som vi transkriberade efteråt.

Datainsamling och bearbetning

Vi valde att göra tre observationer med en kort efterföljande frågeställning till läraren och sedan avslutades den empiriska undersökningen med en längre intervju av de lärare som observerats. Kvale och Brinkmann (2014) påpekar att man som student inte har den tid som bearbetning av ett större antal intervjuer kräver, men att antalet inte är det viktiga så länge man får ut den information man behöver. Valet att intervjua lärarna efteråt gjordes för att inte påverka lärarens arbetssätt mot eleverna, då vi ansåg att en tidigarelagd intervju kunde få läraren att göra undervisningen riktad mot det forskningsområde vi valt. Detta var något vi i möjligaste mån ville undvika.

Observationerna gjordes enskilt, med undantag att den andre fanns med på Skype för medhjälp av observationen, som vi beskrivit ovan. Eftersom vi valt att genomföra en strukturerad observation sammanställde vi ett observationsschema (se bilaga 2) för att försöka säkerställa att vi observerade samma typ av händelser och vara säkra på att vi observerade de händelser som skulle leda till svaret på våra forskningsfrågor. Patel och Davidson (2011) menar att när observationsschema används skrivs de delar som är av intresse för studien ned och sedan fylls schemat i när händelserna inträffar. Eftersom elevers kunskaper och det matematiska innehållet i problemlösningsuppgifterna inte var relevant utifrån studiens syfte har vi därför inte observerat dessa. Vi har inte varit med och valet ut problem inför observationerna utan lärarna har själva bestämt uppgifter till eleverna.

I vår analys av intervjuerna valde vi ett hermeneutiskt perspektiv. Detta innebär att vi i lärarnas svar läste in tolkningar som gjorde att svaren blev mindre osammanhängande och fick en vidare innebörd i det valda ämnesområdet. Detta lyfter Repstad (2007) samt Starrin och Svensson (1994) fram som en viktig aspekt i det hermeneutiska analysarbetet, att man tolkar budskap och gör dem begripliga för andra i sitt sammanhang. Om företeelsen som observerats utgår från handlingar gjorda av enskilda personer i speciella sammanhang och meningen med studien är att försöka fånga upp handlingar som äger rum under en speciell tid

och med ett särskilt syfte, menar Starrin och Svensson (1994) att ett hermeneutiskt synsätt passar för analys av material. Både Repstad (2007) och Starrin och Svensson (1994) menar att hermeneutik handlar om att dela upp helheten i mindre delar, analysera delarna och sedan bygga ihop en helhet utifrån analysen.

Det är viktigt att vara väl insatt i området som beforskas. För att undvika att analysen blir en ensidig tolkning av egna åsikter är det bra om man är två som analyserar arbetet enskilt eller tillsammans, detta skapar en mer nyanserad analys av materialet förutsatt att inte samma värderingar finns hos båda parter som analyserar materialet då detta kan stärka den enkelspåriga tolkningen av underlaget (Repstad, 2007).

När man analyserar sitt resultat är det viktigt att vara noggrann och systematisk för att man inte ska missa någon viktig detalj menar Starrin och Svensson (1994). De menar vidare att för att få svar på sina frågor är det viktigt att man i analysarbetet utgår från dessa och sätter samman materialet på ett sådant sätt att varje del som besvarar samma fråga hänger samman. Efter varje observation förde vi in våra fältanteckningar i vårt observationsschema. Detta för att lättare kunna se vad i observationen som tillhörde vilken fråga och förmåga. Sedan sammanförde vi vårt material till ett gemensamt observationsschema för att lättare kunna göra analysen tillsammans.

Vid bearbetning av vår data och i vårt analysarbete har hänsyn tagits till att den som utförde observationen också har större påverkan av utfallet i analysen. Djupare diskussioner möjliggjordes genom att vi valt att även observera via Skype.

Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

Reliabilitet betyder att de mätinstrument man använder sig av i undersökningen mäter det de är avsedda att mäta. Vi har som vi beskrivit ovan sammanställt ett observationsschema. Detta för att försöka säkerställa att vi tittade på samma saker vid observationerna. Patel och Davidsson (2011) menar att man genom att använda ett sådant schema kan pricka av när olika händelser inträffar och även fylla i händelser efteråt med text. Vi valde också att inte avslöja för mycket för lärarna om vad vi var intresserade av att observera, detta för att säkerställa att de inte ändrade sitt undervisningssätt. Dessa saker stärker reliabiliteten i vårt arbete.

Validitet betyder att man i sin undersökning fått svar på det man avsåg att undersöka menar Brinkkjær och Høyen (2013). Detta försökte vi uppnå genom att göra en strukturerad intervju med intervjufrågor som var framtagna utifrån vårt syfte för att få svar på det som studien avsåg att undersöka. Detta säkerställde också att vi ställde frågorna på samma sätt. Genom detta höjde vi validiteten och även reliabiliteten i arbetet.

Om ett arbete är generaliserbart betyder det att resultatet gäller för fler än de som undersökts. I vår undersökning avsåg vi inte att generalisera, utan vårt resultat gäller endast de observerade lärarna. Eftersom vi endast hade möjlighet att genomföra tre observationer i varje klass kan vi heller inte säga något om huruvida lärarna alltid arbetar på det redovisade sättet. Genom att använda oss av både observationer och intervjuer ökade vi trovärdigheten i undersökningen.

Slutligen genomförde vi vår analys gemensamt och kom då fram till det redovisade resultatet. Dock tog vi hänsyn till att den som genomförde observation och intervju hade tolkningsföreträde. Om flera personer kommer fram till samma resultat blir resultatet mer trovärdigt menar Stukát (2005).

Forskningsetiska principer

I vår studie har vi utgått från de fyra forskningsetiska principer som forskningsrådet (2002) framhåller som viktiga för att skapa ett bra förhållande mellan forskare och deltagare i undersökningen. Dessa principer skyddar deltagarna från att bli felaktigt behandlade och att insamlad data skyddas och inte sprids till otillbörliga personer. De skyddar också deltagarens identitet. Inför våra empiriska studier satte vi samman ett informations/medgivandebrev till vårdnadshavare där dessa riktlinjer beskrivits (se bilaga 3), vi delade också ut ett missivbrev (se bilaga 4) till lärarna med samma information. De fyra riktlinjer och vad de innebär beskrivs var för sig nedan:

Informationskravet

Detta krav talar om att forskaren är skyldig att informera deltagarna om anledningen till studien och vad som förväntas av deltagarna. Forskaren ska informera om att deltagandet är frivilligt och att man har rätt att avbryta sitt deltagande när helst man vill, utan att detta får konsekvenser för deltagaren/den deltagande. Informationen ska vara så beskrivande att deltagarna säkert vet vad de ska göra och därför kan göra ett medvetet val om att delta eller inte. Detta krav förhöll vi oss till genom ovan nämnda informationsbrev utdelat till lärare, vårdnadshavare och elever.

Samtyckeskravet

Forskaren ska hämta in medgivande från deltagarna innan studien startar. Från barn under 15 år måste även vårdnadshavare ge sitt samtycke till att barnet deltar i undersökningen. Detta krav förhöll vi oss till genom att be om lärares och vårdnadshavares tillstånd i de ovan nämnda informationsbreven.

Konfidentialitetskravet

Talar om att alla uppgifter om deltagarna ska handhållas på ett sådant sätt att personerna förblir anonyma. Det får inte skrivas om deltagarna på ett sådant sätt att enskilda personer/dessa kan pekats ut som deltagare i undersökningen. Detta krav förhöll vi oss till genom att förvara inspelat material oåtkomligt för utomstående och genom att radera det inspelade materialet efter arbetets slut samt att fingera lärarnas namn.

Nyttjandekravet

Data som samlas in får endast användas i den aktuella forskningen. Data får således inte lånas ut eller ges vidare i kommersiellt syfte eller till andra forskare än de som deltar i forskningen som datan samlats in till utöver den aktuella forskningen. Detta krav förhöll vi oss till genom att inte låta någon annan använda vårt insamlade material.

Resultat och analys

Under den här delen presenterar vi vårt resultat och vår analys. Vi har valt att i texten dela in avsnittet i två delar, ett för observationerna och ett för intervjuerna. Vi kommer att benämna våra observerade lärare med namnen Kajsa och Siri. Kajsa som varit verksam lärare i sju år undervisar huvudsakligen i årskurs F-1 men har även matematik i årskurs 4-5 och Siri som varit verksam lärare i två och ett halvt år undervisar i årskurs 4. Vår analys baserar sig på den forskning som vi lyft under forskningsöversikten och vi beskriver vårt resultat och vår analys utifrån vårt forskningssyfte, vilket är:

Syftet med detta examensarbete är att undersöka hur lärare som genomgått kompetensutveckling i matematik arbetar för att utveckla elevers förmågor i matematik med utgångspunkt i problemlösning. Vi har utifrån syftet formulerat följande forskningsfrågor som utgångspunkt för vår studie:

- På vilket sätt erbjuds eleverna att arbeta med olika uttrycksformer och strategier i undervisningen?
- Hur synliggör och diskuterar läraren olika matematiska begrepp?
- På vilket sätt erbjuds eleverna att enskilt och tillsammans resonera kring olika tillvägagångssätt i arbetet med problemlösning?

Då åldersspannet på eleverna i de båda klasserna är relativt stort har vi valt att till viss del jämföra de två lärarnas agerande och problematisera runt olikheterna.

Observationer

Vi har valt att analysera våra observationer utifrån vårt observationsschema. Vi lyfter under denna rubrik fram olika delar som är av vikt för eleverna att få möjlighet att träna på för att utveckla de förmågor som vi valt att observera. Först gör vi en allmän analys och redovisar resultatet av de observerade lektionstillfällena, detta för att lyfta fram viktiga delar av arbete med problemlösning som helhet, sedan behandlar vi de tre olika förmågorna var för sig.

Allmän analys och resultat av observationer

Problemen eleverna arbetade med under de observerade lektionerna var utformade på ett sådant vis att de faller under kriterierna för att få kallas problem. De var som Palm m.fl. (2004) beskriver en "skapande aktivitet" vilket gjorde att eleverna inte kunde lösa dem på rutin. Detta innebar också att ingen av eleverna utan viss ansträngning kunde lösa problemen, vilket Taflin (2007) menar är ett kriterie för ett rikt problem. Som vi beskrivit i forskningsöversikten har Taflin (2007) tagit fram sju kriterier som varje problem bör innehålla för att få kallas "rikt problem" (se sidan 3).

Genom att jämföra de problem som presenterades för eleverna med Taflins (2007) kriterier, ser vi att de inte faller inom ramen för "rika problem", då punkt 7 som handlar om att elever och lärare ska kunna formulera nya intressanta problem inte lyfts fram under observationstillfällena. Detta kommenterades dock av Kajsa och Siri som något de kontinuerligt arbetar med tillsammans med eleverna. Kajsa påpekade i intervjun också att det är svårt för eleverna att formulera problem utan att de slutar som räknasagor. Kajsas klass arbetade med tre problem som var uppbyggda på samma vis, att man bör lösa A för att klara B och båda för att hitta en lösning till C. Ett exempel på en problemlösningssuppgift i årskurs 1 var:

Kalle planterar ett solrosfrö. Efter sex dagar är solrosen 10 cm hög

- A. Hur hög var solrosen efter 3 dagar?
- B. Hur många dagar tar det innan solrosen är 20 cm hög?
- C. Hur många dagar tar det innan solrosen är 25 cm hög?

En problemlösningssuppgift som Siris klass arbetade med var:

Knatte, Fnatte och Tjatte har samlat snäckor. Knatte har samlat 3 snäckor fler än Fnatte, som har samlat 3 snäckor fler än Tjatte. Hur många snäckor har Knatte samlat om de tillsammans har samlat:

- A. 24 snäckor?
- B. 36 snäckor?
- C. 48 snäckor?
- D. Hitta på ett liknade problem. Lös det.

Vi kan se att Kajsas klass arbetade med dubbelt och hälften och Siris klass arbetade med treans multiplikationstabell. I båda problemen var det tänkt att eleverna skulle kunna upptäcka mönster som ett led i lösningsprocessen. I några av de problem som lyftes fram under observationerna fanns det som ni kan se ovan en uppgift om att göra liknade problem. Detta var något som valdes bort av Kajsa och Siri under lektionerna. Vår tolkning av deras intervjusvar är att de arbetar med skapandet av problem, men att det tar tid att genomföra och den tiden finns inte alltid under en lektion där man löser en problemlösningssuppgift först. Då vi efterfrågade just arbete med problemlösning när vi tillfrågade lärarna, är det möjligt att de fokuserade på arbetet med lösningen av problem och inte skapandet av nya problem under observationerna.

Lärarnas arbetssätt liknade till stora delar varandra i utformningen, även om vissa skillnader i genomförandet framkom. Under våra observationer använde Kajsa och Siri till viss del olika tillvägagångssätt för att presentera problemen för eleverna. Under första observationstillfället pratade Kajsa allmänt om problemet och sedan lät hon eleverna själva läsa igenom instruktionerna. Stenlund Fridell (2015) påpekar att det stärker elevernas självförtroende och förståelse om de får tyda problemet själva för att komma fram till en strategi som kan ge en lösning. Vi kunde efter denna genomgång se att detta inte riktigt fungerade på Kajsas elever, då de behövde mycket stöttning i form av upprepning av texten i problemet innan de kom igång med sitt enskilda arbete. Vår fundering är att eleverna eventuellt behöver mer erfarenhet av problemlösning än vad Kajsas elever hade, för att på egen hand kunna tolka ut nyckelinformation från texten. Vid resterande observationer läste Kajsa problemet tillsammans med eleverna och gick igenom delar som var viktiga för att kunna lösa problemet, denna metod använde sig Siri av under alla tre observationstillfällena. Att förstå problemet är enligt Polya (2003) det första steget i problemlösningssprocessen och vi märkte att de gånger Kajsa och Siri valde en mer detaljerad genomgång av problemet hade eleverna

lättare att själva komma igång med lösningsprocessen. Vår tolkning är att eleverna förstod problemet snabbare när lärarna i genomgången valde att tillsammans med dem söka viktig information i texten och att de därmed fick mer tid till eget tänkande, vilket är en del av resonemangsförmågan.

En viktig del i problemlösningen är att kunna se vad i texten som är relevant för att hitta en strategi som är användbar för att lösa problemet. Vi tänker att detta inte är något som eleverna kan lära sig utan stöttning av läraren och under observationerna kunde vi se att Kajsa och Siri dels hjälpte till att ta fram nyckelinformation under presentationen av problemet och dels rörde sig i klassrummet och hjälpte eleverna att hitta dessa delar genom att ställa frågor som gav svar som var relevanta för problemet. Ett exempel på detta var "Till höger om dörren står 7 skor och till vänster 11 skor. Hur många barn tror du att det är i rummet?" Kajsa läste texten och frågade om höger och vänster var relevanta för att lösa problemet. Eleverna konstaterade att det inte var det utan att det var antalet skor som gav lösningen på problemet. Genom att hitta nyckelinformation i texten behåller eleverna fokus på frågan och kan med hjälp av dessa ord hitta strategier för att komma fram till lösningen på problemet. Att hitta nyckelinformation i texten är en populär strategi inom problemlösning som lärare gärna ger sina elever enligt Bruun (2013) och vår tolkning är att genom att stötta eleverna i nyckelinformationsletandet säkerställer Kajsa och Siri att eleverna hittar den information som är viktig för problemet. Under de olika observationstillfällena såg vi tydligt att när Kajsa och Siri valde att tillsammans med eleverna leta efter nyckelinformation i texten vid genomgången av problemet stöttade denna information eleverna genom problemlösningssprocessen.

Både Kajsa och Siri använde sig av EPA-modellen (eget tänkande, partänkande, allas tänkande) i olika variationer. Den här metoden ger eleverna möjlighet att enskilt och tillsammans se och resonera kring olika strategier för att komma fram till en lösning av problemet. Genom att presentera arbetsmetoden för eleverna blev de medvetna om hur lektionen skulle genomföras. Det gjorde att eleverna snabbt kunde komma igång med sitt arbete. Under lektionerna lade lärarna vikt vid olika delar av EPA-modellen. Eget tänkande och pararbete var det som framförallt fick olika mycket tid under lektionerna. Svanelid (2014) hävdar att en fördel med EPA-modellen är att eleverna i lugn och ro får tid till eget tänkande. Han menar också att för att modellen ska fungera i en klassrumsmiljö måste läraren skapa en trygg atmosfär där eleverna känner förtroende för varandra och har förståelse för att de kan lära av varandra och på så sätt vill delge sina strategier för varandra. Vår tolkning utifrån observationerna är att eleverna kände denna trygghet och därmed vågade berätta om sina lösningar för varandra i de gemensamma diskussionerna. Det framgick tydligt att eleverna inte heller under pararbetet bekymrade sig om vilken parkamrat de samarbetade med. Kajsa och Siri poängterade i intervjuerna att de arbetat aktivt med eleverna för att uppnå den tryggheten.

Kommunikationsförmågan - Arbete med olika uttrycksformer och strategier

Under detta avsnitt avser vi att besvara och problematisera runt vår första forskningsfråga vilken var: På vilket sätt erbjuds eleverna att arbeta med olika uttrycksformer och strategier i undervisningen?

Viktiga delar i kommunikationsförmågan som vi tittade efter var om eleverna fick möjlighet att samtala med varandra och hur de samtalade, möjlighet att visa/beskriva sina tankegångar och hur det gjordes och om eleverna fick möjlighet att använda sig av olika kommunikationsverktyg och hur dessa verktyg används. Då kommunikationsförmågan och resonemangsförmågan enligt Rystedt och Trygg (2013) har påfallande likheter, kan det vara

svårt att helt skilja dessa två förmågor åt i kommande avsnitt. De delar vi valt att presentera i detta avsnitt faller under kommunikationsförmågan i det avseende att samtalen sker mellan minst två personer vilket gör att någon form av informationsutbyte sker.

Under första observationen lät både Kajsa och Siri eleverna samtala med varandra i par eller i grupper om tre. I båda klasserna fick eleverna ungefär tio minuter till pararbete. Under de övriga observationerna fick eleverna i Siris klass arbeta i par medan Kajsa koncentrerade lektionerna till mer eget arbete, vilket gjorde att de gick direkt till den gemensamma diskussionen utan pararbete. Eleverna i båda klasserna fick möjlighet att samtala med varandra under den avslutande gemensamma genomgången av problemet. Muntlig kommunikation är ett sätt att synliggöra elevers resonemang för både dem själva och kamraterna menar Häggblom (2013) och vi kunde se att eleverna utnyttjade möjligheten att kommunicera med varandra om matematik under pararbetet och den gemensamma genomgången då samtalen koncentrerades runt matematiken i det aktuella problemet. Som vi beskrivit i vår forskningsöversikt menar även Vygotskij (2001) att det är av stor vikt för elevers lärande att de får diskutera i grupp och på så sätt lära av varandra. Vid ett tillfälle hörde vi hur en elev uttryckte sig om en annan elevs lösning genom att utropa "Gjorde du så där? Vad smart!" detta tolkar vi som att eleven under diskussionen med kamraten på ett positivt sätt lärde sig något nytt. Kajsa och Siri gick fram till eleverna när dessa bad om hjälp i övrigt förhöll de sig relativt passiva, men vi såg också att vissa elever fick mer stöttning utan att de frågat efter det. Detta skedde genom att Kajsa och Siri upprepade gånger gick fram till samma elever och frågade hur arbetet gick. Siri fick tillslut presentera en idé till en lösningsstrategi för att eleven skulle kunna komma igång med sitt arbete. Vår tolkning är att vissa elever inte är lika självgående och eventuellt har svårigheter med matematiken vilket Kajsa och Siri är medvetna om och därför uppmärksammar dessa elever mer under det enskilda arbetet.

Under den tredje lektionen i Siris klass var problemet enligt henne svårare för eleverna att lösa då de skulle vara tvungna att tänka i flera steg för att hitta en strategi. Det byggde dock på kunskaper eleverna fått under lektion två, därför valde Siri att låta eleverna arbeta i par från början av lektionen, de fick då arbeta tillsammans i cirka 20 minuter. Detta gjorde att eleverna fick mer tid till samtal om strategier för att lösa problemet. Vi trodde att eleverna skulle känna att dessa 20 minuter var alldeles för mycket, men många av dem blev förvånade och besvikna när tiden började ta slut. Vår tolkning av detta är precis som Polya (2003) menar att det är viktigt att ge eleverna gott om tid i deras tankeprocess. Genom detta kunde vi också förstå att eleverna kände lust att lösa problemet även om det var ansträngande.

Kajsa hjälpte och uppmuntrade sina elever i deras tankegångar för att förmå dem att förklara sina strategier genom att ställa frågor som "Hur tänkte du där?" "Kan du förklara?" "Kan du komma fram och visa?". Eleverna behövde denna stöttning då de inte kommit så långt i sin förmåga att kunna förklara strategier än. Kilpatrick m. fl (2001) talar om att elever har stor förmåga att kunna förklara sina resonemang, men vi insåg att även om de yngre eleverna har förmågan behöver de trots det stöd av lärarens frågor för att fullt ut kunna uttrycka sina tankar. Siris elever har mer erfarenhet och behövde inte lika mycket stöd för att förklara sina tankegångar. Vi kunde trots det märka individuella skillnader även i hennes klass, detta såg vi genom att Siri valde att stötta några elever lite extra under det enskilda arbetet. Både Kajsa och Siri stöttade elevernas tankegångar på ett positivt sätt hela tiden, till exempel genom att de inte förtydligade och påpekade elevernas felaktiga tankegångar utan uppmuntrade till vidare tänkande. Vår upplevelse var att ingen av eleverna i någon av klasserna var rädda för att uttrycka sig även om de var osäkra över sina tankegångar eller svar, detta visade sig genom att alla elever villigt berättade om sina olika lösningsstrategier. Svanelid menar (2014) som vi beskrivit tidigare att det är viktigt att eleverna känner sig trygga med varandra, att det är ett

positivt klimat i klassrummet och att eleverna är medvetna om att de kan lära genom varandras olika tankegångar. Två av Siris elever kom under observation ett fram till olika svar men båda var enligt eleverna rätt (de visste redan innan att det bara fanns ett rätt svar), de var ivriga att få berätta för Siri och hennes svar var "Vad spännande! Då är jag jättenyfiken på dem." Hon visste att en av eleverna gjort fel, men hennes attityd gjorde att eleverna självmant ville ta reda på hur svaren kunde skilja sig åt utan att hon behövde uppmuntra till det. Vår tolkning av situationerna är att det råder ett positivt och tryggt klimat i klasserna då eleverna vågar uttrycka sina tankar även om de inte nått fram till ett riktigt resultat, detta tror vi är ett resultat av lärarnas uppmuntrande stöttning till eleverna och deras positiva inställning till problemlösning. Både Kajsa och Siri gav sina elever papper att rita och skriva på, för att de skulle kunna redovisa sina lösningar och hur de gått tillväga. Kajsa bad eleverna under observation två att rita sina lösningar och sa också att de kunde skriva för att vara extra tydliga. Eleverna har mindre skrivvana än Siris elever men genom att rita sina lösningar kunde de tydligt synliggöra sina tankegångar både för sig själva, kamraterna och Kajsa. Siris elever skrev, ritade och/eller gjorde tabeller beroende på vilka strategier de hade för sina lösningar.

Både Kajsa och Siri använde utöver papper och penna laborativt material under observation ett. Siris elever fick använda tändstickor och Kajsas elever använde "plockisar" som Kajsa ställde fram så att eleverna själva kunde hämta. "Plockisar" är Kajsas eget ord för laborativt material som i detta fallet innebar olika typer av små plastfigurer och centikuber som eleverna kunde använda för att förtydliga sitt tänkande. Siri hade lagt högar med tändstickor i mitten på borden så att alla elever kunde nå dem. Kajsas elever fortsatte att använda "plockisarna" under observation två och tre och det syntes tydligt under observation tre att eleverna med en gång gick och hämtade plockisarna innan de satte sig, istället för att hämta dem efter en stund. Knatte, Fnatte och Tjatte som ingick i problemen i Siris klass under observationerna två och tre hade olika många snäckor respektive snöbollar. För att enklare kunna hålla reda på vem av de tre som hade vad fick Siris elever använda färgpennor för att koda dem. Utöver färgpennor, blyertspennor, papper och suddgummi hade de inget laborativt material, detta förklarade Siri senare med att det helt enkelt inte fanns något material tillgängligt på skolan. Att hon gav eleverna färgpennor motiverar vi med att hon var mån om att ändå ge eleverna någon form av stöttande material. Eleverna fick även använda vitt papper istället för rutigt under det sista tillfället, Siri menar att eleverna kanske påverkas av pappersvalet även om vi (vuxna/lärare) inte tänker på det. Vid de slutliga gemensamma redovisningarna fick Siris elever i par använda tavlan och rita, skriva eller göra en tabell på den för att på det sättet synliggöra sina strategier och tankar för kamraterna ihop med sina muntliga redovisningar. Även Kajsa använde tavlan med sina elever under genomgångarna. Hon och eleverna använde magneter som material under varje lektion ihop med penna för att synliggöra olika strategier. Kajsa var mer aktiv vid tavlan än Siri och utvecklade elevernas tankar. Eleverna hade i stor utsträckning samma lösningsförslag och Kajsa lyfte därför fram olika förslag för att utvidga diskussionen och elevernas tänkande (detta förklaras mer ingående under begreppsformågan). Siris elever hade flera olika förslag och Siri försökte då lyfta fram olika elevpars lösningar för att fördjupa diskussionerna och visa eleverna hur många olika lösningssätt det kan finnas. Taflins (2007) fyrfältare som vi presenterat i forskningsöversikten, är uppbyggd på ett sätt som gör att eleverna får möjlighet att uttrycka sina tankegångar på flera olika sätt, vilket är grunden i kommunikationsförmågan. Trots att Kajsa och Siri inte arbetade efter den specifika modellen lät de eleverna genom sitt arbete med olika kommunikationsmedel uttrycka sina tankegångar på flera olika sätt, vilket enligt oss tyder på att lärarna ändå är medvetna om att olika uttrycksätt är viktigt för elevernas matematikinläring. Dessa arbetssätt tror vi kan göra att eleverna lär sig att beskriva sina egna och tolka varandras lösningar på ett enkelt och tydligt sätt, vilket Palm (2004) samt Rystedt och Trygg (2013) menar är viktiga delar av kommunikationsförmågan

Vår slutsats är att eleverna på ett tydligt och nyanserat sätt fick möjlighet att arbeta med sin kommunikationsförmåga. Lärarna ger dem möjlighet att rita, skriva, samtala och använda laborativt material, eleverna fick även möjlighet att redovisa och jämföra sina olika Lösningstrategier för varandra.

Begreppsförmågan - Arbete med olika begrepp i undervisningen

Under detta avsnitt avser vi att besvara och problematisera runt vår andra forskningsfråga vilken var: Hur synliggör och diskuterar läraren olika matematiska begrepp?

Viktiga delar i begreppsförmågan som vi tittade efter var om eleverna fick repetera begrepp, jämföra olika begrepp, diskutera olika begrepps betydelse och om begrepp som används inom aktuellt problem förklaras.

Då eleverna i Siris klass redan befäst många begrepp var det inte nödvändigt för dem att få begreppen inom aktuellt problem repeterade i samma utsträckning som eleverna i Kajsas klass. Kajsa införde inga nya begrepp för eleverna under lektionerna, men var noga med att lyfta fram och diskutera begrepp som ingick i problemen för att eleverna skulle få repetera dem. Som vi tidigare nämnt är det stor åldersskillnad mellan klasserna vi observerat och Palm m.fl. (2004) menar att god begreppsförmåga är viktigt för att eleverna ska kunna utveckla sitt matematiska kunnande. Siris elever är äldre och har kommit längre i sina matematikkunskaper, vår tolkning är därmed att det borde vara viktigare för Kajsa att repetera begrepp oftare med sina elever för att ge dem möjligheten att befästa dem och på så sätt kunna komma vidare i sin matematiska inläring. Vid genomgången av problemen lyfte Kajsa fram relevanta begrepp och frågade om eleverna kom ihåg vad dessa betydde. Under det egna tänkandet och pararbetet gick Kajsa mellan eleverna och betonade viktiga begrepp som eleverna fick förklara, vilket gav henne möjlighet att se om eleverna förstod begreppens innebörd. Vår tolkning är att detta även hjälpte eleverna att se vad som var relevanta begrepp för att kunna lösa problemet. Vid nästa observation, innan introduktionen av ett nytt problem, återkopplade Kajsa till begrepp som diskuterats under föregående problem, vilket gjorde att eleverna återigen fick repetera begreppen. Under de gemensamma diskussionerna lyftes många olika begrepp fram och jämfördes med varandra. Eleverna använde sig även av olika benämningar på samma begrepp som till exempel hälften/halva och Kajsa förklarade att de betyder samma sak. Under ett av problemen skulle eleverna se hur många kattungar varje kattmamma kunde ha om det fanns tre mammor och tio kattungar (se bilaga 5). Vid genomgången av elevernas lösningar hade de flesta elever placerat ut ett så jämnt antal ungar vid varje mamma som möjligt. Efter att eleverna visat på tavlan med hjälp av magneter hur de tänkt, flyttade Kajsa runt magneterna vilket gav varje mamma olika många ungar. Kajsa frågade om även denna lösning kunde vara rätt. Eleverna förstod att det var antalet kattungar som var viktiga och inte att alla kattmammor fick lika många och Kajsa förklarade att eftersom det inte stod *lika många* kattungar i texten behövde mammorna endast ha tio ungar *gemensamt*, vilket gjorde att variationen på ungar kunde vara stor mellan mammorna. Vi kunde under observationstillfället se att eleverna förstod det Kajsa visade dem. Några begrepp som repeterades och diskuterades var större/mindre, fler/färre och dubbelt/hälften, lika många och gemensamt.

Det var framför allt under det sista problemet som observerades som ett nytt begrepp behövde lyftas fram och förklaras mer ingående i Siris klass. Siri inledde den lektionen med att direkt nämna att ett nytt, för problemet väsentligt begrepp skulle diskuteras. Därefter nämnde hon det nya begreppet "sånär som" och frågade eleverna om de visste vad det betydde, eleverna fick då komma med förslag på betydelser. Problemet som behandlades under lektionen var:

Knatte hade rullat tre gånger så många snöbollar som Tjatte, sånär som på två.
Fnatte hade rullat dubbelt så många som Tjatte, sånär som på en. Hur många hade var och en av dem rullat om de tillsammans hade gjort:

- A. 27 snöbollar?
- B. 39 snöbollar?

Utifrån detta fortlöpte diskussionen på följande vis:

Siri: "Sånär som på två? Vad betyder det?"

Elev: "Kanske nära, att det var nära?"

Siri: "Ja, nu börjar vi närma oss, att det är lite nära"

Sedan läser Siri hela problemet igen och då svarar en annan elev

Elev: "Nära två alltså nästan två."

Siri "Ja, vi ska ha med tvåan. Den ska vara kvar. Men det är inte nära två..."

Efter lite diskussioner kommer en elev fram till att man måste ta bort två för att det ska bli *sånär som* och då svarar Siri att "Ja, just det! När Knatte har gjort tre gånger så många så får man ta bort två. Så när som på två. Det fattas två stycken för att det ska bli tre gånger så många."

Under genomgången diskuterades, repeterades och jämfördes andra begrepp såsom "tre gånger så många" och "dubbelt så många" och det framgick tydligt att dessa begrepp inte innebar några svårigheter för eleverna. Vår tolkning av detta är att Siri vid begreppsinnläringen arbetat enligt Vygotskijs (2001) teorier som innebär att man gemensamt med eleverna lyfter fram nya och repeterar redan befästa begrepp och sätter in dem i nya meningsfulla sammanhang, vilket enligt Vygotskij fördjupar begreppsförståelsen.

Vår slutsats är att Kajsa arbetar mer aktivt med att lyfta fram och förklara begrepp än vad Siri gör. Detta tror vi bland annat har med elevernas ålder att göra. Eleverna får under de observerade lektionerna repetera, jämföra och diskutera nya och äldre begrepp för att träna på sin begreppsförståelse. Kajsa och Siri förklarar även olika begrepps betydelse för eleverna under genomgångarna av problemlösningsuppgifterna, men även senare under lektionerna.

Resonemangsförmågan - Att resonera enskilt och tillsammans

Under detta avsnitt avser vi att besvara och problematisera runt vår tredje forskningsfråga vilken var: På vilket sätt erbjuds eleverna att enskilt och tillsammans resonera kring olika tillvägagångssätt i arbetet med problemlösning?

Viktiga delar i resonemangsförmågan som vi tittade efter var om eleverna fick granska sina egna lösningar, granska kamraters lösningar, argumentera för sina lösningar, diskutera olika lösningar med varandra och tid till eget tänkande.

I det egna arbetet fick eleverna tid att granska sina egna lösningar genom att Kajsa och Siri uppmuntrade dem att försöka hitta olika strategier för att komma fram till lösningen på problemet. Även i pararbetet och den gemensamma diskussionen fick eleverna möjlighet att

granska sina egna lösningar. Eleverna granskade varandras lösningar genom att de presenterade dem för varandra och samtidigt gjorde de en bedömning om kamratens lösning verkade rimlig. "Tänk på förmågorna, ni måste kunna förklara för varandra, visa ert resonemang, redogör era tankar." "Tänk på att förklara för varandra hur ni har tänkt, inte säga svaret direkt utan redogöra för era tankar innan ni redovisar ert svar" "Kompisens uppgift är att tänka är det rimligt, ställa bra frågor och hjälpa till med beräkningar på vägen" på detta sätt lyfte Siri fram olika strategier för eleverna om hur de kunde gå tillväga för att granska kamraternas lösningar. Vi kunde se att detta hjälpte eleverna att fortsätta arbeta aktivt och det gav dem redskap till att utveckla sin resonemangsförmåga i enlighet med vad Ahlberg (1995) säger om att granska kamraters lösningar, lyssna på kamraternas resonemang och försvara sina egna lösningar. Vid den gemensamma genomgången av problemet gav Kajsa och Siri eleverna möjlighet att argumentera för sina lösningar och även diskutera olika lösningar på problemet. Detta skedde genom att eleverna inför sina klasskamrater fick presentera sina lösningar på tavlan. Kajsa och Siri uppmuntrade klasskamraterna att ställa frågor om till exempel sådant de inte förstod angående den strategi som använts till lösningen eller om de ville veta mer om tankegången. I ovan beskrivna arbetssätt konstaterar vi att eleverna fick granska sina och andras lösningar kritiskt vilket Palm m.fl. (2004) menar är en viktig del för att utveckla resonemangsförmågan.

Eleverna fick även möjlighet att diskutera olika lösningar under lektionen. Detta skedde på lite olika sätt, bland annat under pararbetet och även vid den gemensamma genomgången. I Siris klass som består av äldre elever, presenterade eleverna själva olika lösningsstrategier under pararbetet och den gemensamma genomgången. Detta indikerar att eleverna har kommit en bit i sin problemlösningsförmåga vilket enligt Juter (2014) handlar om att kunna använda sina erfarenheter för att lättare kommunicera med hjälp av olika begrepp och strategier. I den andra klassen presenterade Kajsa tillsammans med eleverna olika lösningsförslag under den gemensamma genomgången. Vår tolkning är att eftersom Kajsas elever är yngre har de inte kommit lika långt i sin utveckling av problemlösningsförmågan vilket gör att de inte heller kan resonera eller diskutera sig fram till lika många olika strategier. En annan skillnad som vi tror kan påverka lärarnas agerande är att Siris klass består av fler elever än Kajsas. Detta kan bidra till att det inte kommer fram lika många förslag på strategier från Kajsas elever, vilket gör att hon väljer att själv lyfta fram flera förslag till eleverna för att de ska få fler synliga strategier att arbeta med i sin vidareutveckling av problemlösningsförmågan.

Under det egna tänkandet fick eleverna möjlighet att resonera med sig själva för att komma fram till olika lösningar. Medan eleverna arbetade självständigt var det lugnt i klassrummen och Kajsa och Siri lät alla elever få gott om tid att fullfölja sina tankegångar utan att avbryta för att gå vidare till nästa steg. Som vi tidigare beskrivit säger Polya (2003) att problemlösningsprocessen måste få ta tid. Trots att eleverna fick tid på sig, kunde vi se att några elever hade bråttom att komma vidare. Vi tolkar detta som att trots att eleverna fick tid till problemlösning av lärarna var de mer vana vid att lösa rutinuppgifter, men eftersom problemlösning är en process behöver eleverna träna på att det får ta tid att komma fram till en lösning. Den ansträngning som Taflin m.fl. (2005) talar om kanske kan vara för mycket för dessa elever och en strategi enligt Bruun (2013) är att lära sig lösa lättare problem, vilket kanske skulle kunna vara till nytta för eleverna i fråga. En annan tolkning är att om eleverna får för lätta problem behövs inte den tid som ges och en konsekvens av detta kan vara att när de ställs inför ett svårare problem blir de stressade av att de inte hittar en strategi direkt. Båda lärarna höll sig i övrigt i bakgrunden och gick endast fram till elever som bad om deras hjälp. När lärarna hjälpte en elev bad de först om en förklaring till tankegången av eleven och utifrån den ställde läraren frågor som till exempel "Hur kan du använda detta för att komma fram till en lösning?" "Vad är nästa steg?" "Vad vet du om problemet?" hjälpen bestod också

av förslag på olika strategier "Börja bakifrån" "Ta ett steg i taget" och så vidare. Stenlund Fridell (2015) menar att läraren måste motivera eleverna för att de ska orka arbeta med problemet under en längre tid. Att ställa ovan beskrivna frågor kan enligt oss vara ett sätt för lärarna att ge eleverna motivation att fortsätta leta efter en strategi för lösningen av problemet.

Vår slutsats är att eleverna får resonera, diskutera, argumentera och jämföra sina lösningar med varandra under lektionerna. Siri och Kajsa uppmuntrar dem att synliggöra sina tankegångar. Eleverna ges också tid till enskilt tänkande vilket är en viktig del i resonemangsförmågan. Med tanke på skillnader som framkommit i Kajsa och Siris undervisning gör vi tolkningen att de har anpassat sin undervisning efter elevernas ålder, men det kan även finnas andra anledningar.

Intervju

Under den här delen presenterar vi resultatet och analysen av våra intervjuer med Kajsa och Siri. Utifrån vårt syfte och våra forskningsfrågor lyfter vi som ett komplement till våra observationer fram lärarnas tankar om arbetet med förmågor under problemlösning och hur de själva anser sig ha förändrat sin undervisning efter genomgången kompetensutveckling i form av Matematiklyftet.

Att arbeta med problemlösning

Både Kajsa och Siri tyckte att arbete med problemlösning är en positiv undervisningsmetod. Siri nämner under intervjun att hon fått mer "kött på benen" för att problemlösning är en bra metod efter Matematiklyftet, hon är därför inte lika rädd för att misslyckas i undervisningen längre. Hon menar att om lektionen inte blir helt perfekt ser hon det numera inte som ett misslyckande utan som ett tillfälle till diskussion under nästa lektionstillfälle. De nämnde båda att även eleverna uppskattar matematik genom problemlösning och att de tycker om att kunna känna stöd av varandra. Kajsa nämner under intervjun att hon efter Matematiklyftet själv anser sig lättare kunna se vilka brister som finns hos eleverna i årskurs 4-5 som hon också undervisar i matematik, det har också gjort att hon nu lättare kan anpassa och planera sin undervisning i årskurs F-1 så att dessa brister inte uppkommer i lika hög grad. För att slippa ovan nämnda begreppsbrister hos eleverna menar Kajsa att "det är viktigt att börja tidigt, man kan börja redan i förskolan, man får ju anpassa problemet efter den grupp elever man har". Hennes tankar stämmer väl överens med det Hagland m.fl. (2005) säger om vikten av att anpassa problemen efter eleverna. Vår tolkning är att hennes ord stämmer med det vi såg i vår studie, problemen kändes anpassade efter elevernas nivå, men i övrigt kan vi inte säga så mycket då det är Kajsa och inte vi som är medveten om elevernas kunskapsnivå. Kajsa nämnde också att man får med många andra delar ur läroplanen, till exempel läsförståelse, när man arbetar med problemlösning. Siri menar att problemlösning är ett bra sätt att träna och lyfta fram förmågorna på och Kajsa menar att eleverna genom strategier och tillvägagångssätt blir medvetna om hur de använder matematiken. Taflin m.fl. (2005) menar att det är viktigt att elever får träna på olika strategier i arbete med problemlösning för att ha nytta av det i sin matematiska utveckling. Eftersom Kajsa och Siri båda är positivt inställda till denna arbetsmetod använder båda arbete med problemlösning inom de flesta delar av matematiken.

Arbete med förmågor och strategier

"Jag tror att det faktiskt är det lättaste sättet att utveckla förmågorna, just för att det blir så naturligt." uttryckte Siri på frågan om problemlösning var en bra arbetsmetod för att utveckla förmågorna. Kajsa pratade om problemlösningsförmågan och återkopplade till att det är viktigt att börja tidigt så att eleverna blir vana vid att "tänka till". Ahlberg (1995) belyser

också vikten av att låta elever börja arbeta med problemlösning tidigt i åldrarna. Kajsa var också tydlig med att det inte går att arbeta med bara en förmåga åt gången, utan förmågorna går hela tiden in i varandra. Detta är något som även poängteras av Juter (2014), att förmågorna under utveckling överlappar och framhäver varandra, vilket också framkommer tydligt under observationerna. Kajsa anser sig arbeta lika mycket nu som innan Matematiklyftet med förmågorna i matematiken, hon lyfter inte fram förmågorna endast i arbetet med problemlösning utan det följer fortlöpande med i all hennes matematikundervisning. En del av syftet med Matematiklyftet är att läraren ska kunna se och urskilja de olika förmågorna i matematikundervisningen (Skolverket, 2014) och Siri tyckte att hon hade lättare att urskilja förmågorna i undervisningen nu och att hon kunde se när eleverna tränat på de olika förmågorna.

Som undervisningsstrategi nämner Kajsa och Siri att de talar mycket matematik och att de använder matematikspråket i undervisningen. De framhöll matematiksamtalet som viktiga för att eleverna ska få med sig de rätta matematiska begreppen och enligt Vygotskij (2001) är språket avgörande för att elever ska utveckla sin begreppsvärld fullt ut. Överlag nämner både Kajsa och Siri att det är viktigt för eleverna att på olika sätt få kommunicera matematik muntligt, att de diskuterar, argumenterar och berättar om lösningsstrategier, detta är också något som vi tydligt såg under observationerna då mycket tid lades på just den muntliga kommunikationen. Kajsa sa också att hon tycker att det är viktigt att eleverna är delaktiga genom att de frågar varandra om tillvägagångssätt och att de ser att det finns olika vägar till lösningar på problemen, Ahlberg (1995) menar att även detta är ett socialt samspel där eleverna färdighetstränar de olika förmågorna och internaliserar kunskap med hjälp av varandra. Siri berättade att hon under de gemensamma genomgångarna brukade synliggöra elevernas olika typer av lösningsstrategier för att synliggöra för eleverna att det finns fler än ett sätt att lösa problemet på, detta var något som vi kunde se under observationerna. Siri poängterade också att kommunikation även sker mellan eleverna och att hon anser att en poäng med pararbetet är att eleverna tränar på detta. Hon menade vidare att det är viktigt att eleverna tar eget ansvar i kommunikationen med varandra och att de tränar på att våga fråga varandra om strategier de inte förstår. Vygotskij (2001) menar att elever som arbetar med varandra eller får stöd av läraren i sin matematikutveckling kan uppnå sin proximala utvecklingszon. Siri talade om att genom att eleverna får arbeta tillsammans vågar även de lite tystare eleverna delta i samtalen genom att de känner stöd av varandra och inte behöver stå ensamt ansvariga för en lösning, vår slutsats är att även de tystare eleverna genom samarbetet lättare kan uppnå sin proximala utvecklingszon.

Texten i ett problem ska enligt Taflin m.fl. (2005) vara lätt att förstå, men ändå vara utmanande för eleverna och väcka deras nyfikenhet. Kajsa talade om att även om texten i problemen är anpassad efter elevernas förmåga är det viktigt att de förstår alla begreppen, annars blir det ändå svårt för dem att hitta en lösning på problemet. Vår slutsats av detta är att om begreppen, som Kajsa pratar om fattas hos eleverna, kanske även deras nyfikenhet försvinner vilket gör det ännu svårare att arbeta med problemet. Hon talade vidare om att eftersom man arbetar tillsammans med eleverna är problemlösning en bra metod för att upptäcka de "små bitarna" som eleverna saknar i sin begreppsbyggnad. Vygotskij (2001) och Häggblom (2013) menar att det är viktigt att använda relevanta ord och material under begreppsbyggnaden. När Kajsa lär eleverna nya begrepp gör hon det genom gemensamma övningar med stöd av diskussioner runt begreppets betydelse. Siri nämnde också det positiva med att man under problemlösning arbetar tillsammans med eleverna och att man genom det samarbetet lättare kan stötta eleverna i utvecklingen av begrepp. Lärarnas och elevernas samarbete framkom tydligt för oss under observationerna. Vygotskij (2001) menar att det är viktigt att tanken och ordet får en stor del i undervisningen och genom Kajsas och Siris arbetsmetoder lyfter de fram samtalen under begreppsbyggnaden.

Siri pratade om att eftersom eleverna inte har fått med sig de rätta benämningarna av flera begrepp från F-3, varvar hon de matematiska begreppen med mer vardagliga ord. Kajsa säger att hon i arbetet med de äldre eleverna sett att det är många begrepp som saknas. Hon försöker därför alltid använda de korrekta namnen på begreppen under matematiklektionerna med de yngre eleverna och Kilpatrick m.fl. (2001) menar att även yngre elever har god förmåga att hantera nya och svårare ord och begrepp. Kajsa poängterar vikten av att eleverna, när matematiken blir svårare, behöver ha de rätta namnen med sig för att få förståelse för det de arbetar med och Häggblom (2013) påpekar vikten av att lägga undervisningen på elevernas rätta nivå från början då hon tror att det gynnar inläringen av matematik på högre nivå. Vår slutsats utifrån detta är att man som lärare bör använda de korrekta begreppen med eleverna, då Kajsas och Siris erfarenheter talar om att det kan vara svårt att ändra äldre elevers benämningar på begrepp.

Lärarnas och elevernas inställning till problemlösning

Enligt Kajsa och Siri tycker båda klasserna att det är roligt att arbeta med problemlösning, men de tycker också om att arbeta i matematikboken. För att få med alla delar ur det centrala innehållet och förmågorna ur syftedelen i Lgr 11 menar Kajsa att det är viktigt att varva enskilt arbete i matematikboken med gemensamt problemlösningsarbete, då hon inte anser att arbete i matematikböcker täcker upp hela kursplanen i matematik och inte tillåter eleverna att arbeta med alla delar av förmågorna. Själv utgår inte Kajsa ifrån boken när hon undervisar utan använder sig endast av den i vissa situationer men hon väljer att inte ta bort matematikboken helt då eleverna uppskattar den. Hon arbetar mycket konkret med eleverna och hennes elever uppskattar att få arbeta tillsammans för att komma fram till en lösning.

Siris elever har uttryckt en önskan om att inte ha någon matematikbok nästa termin, enligt hennes elever förstår de matematiken bättre nu och tycker att tack vare problemlösningen har matematiken blivit roligare. Vi kan inte dra några slutsatser om elevernas arbete med matematikboken, men vi kunde se att eleverna var engagerade i arbetet med problemlösning. Siri menade dock att materialtillgången på skolan än så länge är för begränsad, vilket gjorde henne tveksam till att plocka bort matematikboken helt. Siri talade liksom Kajsa om vikten av att varva olika arbetssätt, men uttryckte att visst stöd ändå går att få genom matematikboken. För att eleverna ska känna att de har nytta av sina matematikkunskaper även utanför skolan säger Ahlberg (1995) som vi beskrivit i forskningsöversikten, att det är viktigt att varva arbetet med matematikboken med problem som är kopplade till vardagen. Både Stenlund Fridell (2015) och De Lange (2003) påpekar nyttan av det vardagsnära för att göra matematiken mer tillgänglig för eleverna, men varken Kajsa eller Siri nämner egentligen den vardagliga kopplingen till sina val av problem, Siri menade dock att hon försökt välja figurer som eleverna vet vilka det är. Vi kunde under våra observationer se att problemen ändå till viss del är kopplade till sådant som eleverna känner till och kan koppla till vardagen.

Tid till problemlösning

Som vi beskriver i vår inledning anser sig många lärare inte ha någon tid att lägga på arbetet med problemlösning och förmågorna. För att utveckla elevernas kunskaper i matematik lyfter Skolverket även fram att de länder som ligger bra till i olika rapporter arbetar mycket med problemlösning med sina elever. Då Lgr 11 lägger mycket vikt vid problemlösning och arbetet med förmågorna väljer vi att lyfta fram tiden som våra observerade lärare lägger på denna arbetsmetod.

Enligt Siri lägger hon mellan en-två lektionstillfällen varje vecka på problemlösning med eleverna. Hon lyfte fram att vissa lektioner bara är runt 40 minuter och att det egentligen är för snålt med tid, men ibland går det att arbeta med något litet problem även under ett sådant kortare pass, det går dock inte att gå in på djupet då. Polya (2003) menar att problemlösningssprocessen måste få ta tid och Siri poängterade att det är viktigt att planera in mer lektionstid än man tror behövs, för att eleverna verkligen ska hinna samtala om problemet ordentligt. Detta märktes framförallt under observation tre då introduktionen av problemet tog längre tid än planerat, vilket gjorde att elevernas samtalstid förkortades och ett resultat av detta blev att eleverna kände sig stressade och vår tolkning är att de då hade svårt att arbeta koncentrerat med att lösa problemet. Siri var noga med att poängtera att problemlösning kräver efterarbete, att man måste gå igenom elevernas lösningar och titta efter sådant man kan lyfta vid efterföljande lektionstillfälle. Planeringstiden bedömde hon vara cirka en timme - en och en halv för att kunna titta på problemet och själv komma fram med strategier samt även kontrollera elevernas arbete efteråt.

Enligt Kajsa varar inte elevernas enskilda arbete samt pararbete i mer än 40 minuter i årskurs F-1, då de enligt henne inte orkar arbeta med problemlösning under längre tid, trots att de tycker att det är roligt. Sedan är det dags för gemensamt arbete och att knyta ihop det eleverna arbetat med. Stenlund Fridell (2015) påpekar vikten av att eleverna bör vara motiverade för att orka arbeta med problemlösning under en längre tid och vår tolkning är att Kajsa upprätthåller elevernas motivation genom att inte förlänga lektionerna, vilket vi tror gör att eleverna inte hinner tappa motivationen. Kajsa lägger lika mycket tid som Siri på planering och efterarbete, runt en och en halv timme i veckan. Hon lyfte även fram att dokumentationen av elevernas arbete ingick i den angivna tiden.

Sammanfattande resultat och analys

Sammanfattningsvis kunde vi se att klimatet i klassrummen var positivt när eleverna arbetade med problemlösning, både elever och lärare var engagerade och intresserade. Kajsa och Siri var båda noga med att lyfta fram och synliggöra olika förmågor under lektionerna, detta var något vi kunde se under observationerna men som också förtydligades av lärarna själva under intervjuerna. Siri påminde flertalet gånger sina elever om att resonera, kommunicera och synliggöra sina tankar för kamraterna vilket hon också menade var syftet med lektionerna. Kajsa var noga med att lyfta fram och repetera begrepp med sina elever och hon pratade i intervjun om hur viktigt det är att använda matematikspråket för att riktigt befästa olika matematiska begrepp. I båda klasserna kunde vi se att eleverna fick möjlighet att arbeta med kommunikationsförmågan genom olika uttrycksformer, då framförallt tal, bild, laborativt material och text men även genom tabeller. Under intervjuerna framhävde både Kajsa och Siri den muntliga kommunikationen framför de andra uttrycksformerna inom kommunikationsförmågan. Både Kajsa och Siri lyfte också fram att problemlösning måste få ta tid för eleverna och att det är en positiv arbetsmetod eftersom man arbetar tillsammans med eleverna och att man därigenom lätt kan stötta dem. Kajsa och Siri arbetar enligt dem själva aktivt utifrån sina kunskaper och erfarenheter om problemlösning de matematiska förmågorna. Detta var också något som syntes under våra observationer, vi vill dock återigen poängtera att mycket av deras kunskap ligger dold för oss och våra slutsatser baserar sig enbart på det som framkommit under observationer och intervjuer.

Vår slutsats är att eleverna i båda klasserna får arbeta med att utveckla alla våra beforskade förmågor dock i olika grad. Vi tolkar detta som att eftersom eleverna ligger på olika kunskapsnivåer måste lärarna lägga fokus på olika delar. En annan tolkning vi gjort är att lärarna helt enkelt skiftar fokus mellan förmågorna vilket inte hann framkomma under den

korta tidsperiod vi observerade lektioner. En annan slutsats vi gör är att det kanske inte heller är möjligt att hela tiden ha fokus på flera förmågor samtidigt, kanske gör det inte heller något att man flyttar fokus mellan förmågorna. Om man utgår från att förmågorna är sammanflätade så som Kilpatrick m.fl. (2001) nämner, får man ändå med sig alla förmågor i sin undervisning.

Diskussion

Under diskussionsdelen kommer vi att diskutera vårt resultat utifrån de tankar som väckts under analysen av vårt material. Vi börjar med att diskutera vårt val av metod, därefter följer en resultatdiskussion som börjar med en kort sammanfattning av studiens resultat. I slutet av diskussionen kommer vi även lyfta nya frågor som uppstått under studiens gång.

Metoddiskussion

Vi anser att i denna studie har vårt val av metoder fungerat utmärkt då intervjuerna kompletterat observationerna på det sätt vi tänkt oss. Att kombinera observationer med intervjuer kan enligt Repstad (2007) göra att materialet går att analysera mer nyanserat eftersom man får möjlighet att ställa frågor om det man observerat. Vi anser att vi under vår analys av materialet använt intervjuerna som komplement till våra observationer, vilket var vår avsikt och att vi på ett hermeneutiskt vis gjort tolkningar av det vi sett under observationerna. Eftersom meningen med vår empiri var att fånga upp enskilda lärares handlingar menar Starrin och Svensson (1994) att just ett hermeneutiskt förhållningssätt är att föredra eftersom det gör resultatet mer begripligt när det sätts i ett sammanhang. Som vi tidigare nämnt finns det en risk att man som forskare misstolkar det man observerat (Repstad, 2007) men då vi valde att komplettera varje observation med en kortare intervju kunde vi lättare rama in lärarnas avsikter utifrån det vi observerat. Naturligtvis finns det ändå en risk att vi misstolkat någon situation under observationerna, framförallt då vi på grund av tidigare nämnda orsaker valde att genomföra observationerna enskilt. Trots fördelen med att den andra var med via Skype kan denna inte vara säker på att ha uppfattat situationen på korrekt vis genom detta, då deltagandet via Skype omöjliggör rörelse i klassrummet eftersom kameran endast visar en del av klassrummet.

Att vi innan observationstillfällena valde att sammanställa ett observationsschema ser vi som positivt då detta fungerat väldigt bra för att försäkra oss om att vi observerade liknande händelser. Observationsschemat fungerade även bra som analysverktyg av våra observationer och intervjuer. Precis som Patel och Davidson (2011) säger byggde vi vårt observationsschema utifrån det vi var intresserade av att se. Under vårt analysarbete kunde vi tydligt se likheter och skillnader hos de observerade klasserna och kunde därför på ett okomplicerat sätt analysera och diskutera samma delar av vår observerade data. Då vi sammanställde vårt observationsschema själva kan vi se att det hade kunnat vara en risk att det inte fungerat som analysverktyg, då vi inte haft möjlighet att göra någon form av pilotobservation.

Som poängteras av Kvale och Brinkmann (2014) har studenter inte mycket tid till förfogande för att sammanställa ett stort antal intervjuer. Vi hade inte heller möjlighet att intervjua fler lärare då vi koncentrerade oss på att få tillräckligt med data från observationerna. Meningen med intervjuerna var också att få de observerade lärarnas syn. Om forskningsmaterialet inte är för massivt menar Kvale och Brinkmann (2014) att informationen blir mer lätthanterlig och ger forskaren möjlighet att vara mer uppmärksam på detaljer. De framhäver också att sådan

typ av forskning absolut kan vara av nytta, men det är viktigt att inte ha som avsikt att generalisera resultaten, vilket vårt syfte inte heller var. Vårt syfte var inte heller att jämföra de båda lärarnas agerande nu mot innan de genomgick Matematiklyftet, då detta är något som vi inte kunde se eftersom våra observationer ägde rum efter kunskapslyftet.

Då vi i huvudsak tittat på lärarnas agerande i klassrummet lade vi inte fokus på elevernas kunskaper. Vi kan se att jämförelserna som vi redovisat i resultatet kunde varit annorlunda om det varit möjligt för oss att observera två klasser i samma årskurs. Detta hade också eventuellt tydliggjort olikheter i lärarnas arbetssätt mer då utfallet i sådant fall inte kunnat bero på elevernas ålder. En tanke är också att om vi valt att observera en lärare som genomgått Matematiklyftet och en lärare som inte gjort detta, hade jämförelserna i undervisningsätt kanske kunnat visa på större skillnader än vad resultatet nu visade.

Resultatdiskussion

Vi kom fram till att de förmågor vi beforskat får eleverna i de båda klasserna aktivt arbeta med under de lektioner vi var närvarande vid, om än i olika hög grad. Lärarna uttryckte att de haft nytta av sin kompetensutveckling i sitt arbete med problemlösning tillsammans med eleverna. Det rådde i båda klasserna ett positivt arbetsklimat och vi upplevde att både elever och lärare var engagerade i problemlösningsarbetet.

Vid observationstillfällena kunde vi se att eleverna fick möjlighet att arbeta med flera olika kommunikationssätt, men under intervjuerna framhöll Kajsa och Siri främst samtalen mellan eleverna som viktiga i kommunikationsförmågan. Vi menar utifrån observationerna att Kajsa och Siri under intervjutillfällena inte reflekterade över kommunikationsförmågans fulla innebörd, istället sammanfogade de kommunikationsförmågan och resonemangsförmågan till en helhet. Ytterligare en tolkning vi kan göra är att de inte kopplar samman olika uttryckssätt med kommunikationsförmågan. Som Kilpatrick m.fl. (2001) säger flätas förmågorna in i varandra och därför drar vi ändå slutsatsen att Kajsa och Siri är medvetna om att de olika uttrycksformerna är viktiga i elevernas utveckling av förmågorna. Både Kajsa och Siri menar dessutom att det inte går att undervisa i endast en av förmågorna, utan att i ett problem lyfts flera förmågor fram samtidigt. Vi har under analysarbetet själva insett hur nära dessa två förmågor ligger varandra då det i vissa situationer varit svårt att skilja dem åt, vilket vi också har poängterat i vår resultatdel. Detta ger oss en förståelse för det som Kajsa och Siri lyfter fram i intervjuerna.

Under andra observationstillfället lyfte Kajsa fram begrepp som ingick i föregående lektions problem. Vi har tolkat detta som ett sätt att försöka befästa begreppen ytterligare hos eleverna. Vi kan dock se att det skulle kunna bli en konsekvens av att repetera begrepp innan genomgång av ett nytt problem om dessa repeterade begrepp inte är en del av det nya problemet också. Vår fundering är att det kanske förvirrar eleverna mer än det befäster kunskaperna om eleverna inte får möjlighet att arbeta med de repeterade begreppen ytterligare under lektionen. Eleverna skulle på detta sätt möjligen kunna tappa fokus från de begrepp som är relevanta för det nya problemet som presenteras.

Som vi beskrivit i vårt resultat lyfter inte Siri fram begrepp på samma sätt som Kajsa gör för sina elever. Utifrån detta drog vi slutsatsen att deras olika arbetsmetoder skiljer sig åt beroende på elevernas ålder. Vi anser att det är viktigt att fortsätta lyfta fram och repetera begrepp även för äldre elever, annars kan det finnas en risk att de inte befäster begreppen ordentligt. Vi kan som lärare inte ta för givet att elever uppfattat innebörden av begreppen, inte heller att de själva klarar av att sätta in dem i nya sammanhang. Som exempel kan vi

nämna problemet med kattmammorna och Kajsas avslutande genomgång där hon visade eleverna olika lösningar utifrån det begrepp som lyfts i problemet. Säljö (2014) talar om att elever måste öva praktiskt för att befästa kunskapen och vi menar att när lärarna tror att eleverna befäst begreppets innebörd kan de lyfta samma begrepp men i ett nytt problem under nästkommande lektion. Detta för att säkerställa att eleverna kommer ihåg innebörden av begreppen och för att låta dem aktivt arbeta vidare med att befästa begreppet.

I resultatet har vi beskrivit hur vissa elever har bråttom med att hitta en lösning på problemen och vi har beskrivit detta som att de behöver träna på att arbeta med problemlösning får ta tid då det är en process. Vi kan också se att valet av svårighet på problem är känsligt då vi kan se konsekvenser om man väljer för lätt eller för svårt utifrån elevernas nivå. En konsekvens av att välja ett för lätt problem är att problemet blir en rutinuppgift som eleverna lätt kan lösa och därmed inte kräver den ansträngning som Taflin m.fl. (2005) talar om, då får de heller inte träna på att arbeta med problemlösning får och måste ta tid. Konsekvenser av att välja ett för svårt problem blir istället att det finns en risk att eleverna tappat motivationen att lösa problemet och att de då börjar se problemlösning som något tråkigt och svårt.

Som vi beskrivit i forskningsöversikten är det vid val av matematiska problem viktigt att fokusera på förmågorna, men man ska också välja vardagliga problem som är anpassade efter elevernas kunskaper och förförståelse. En tanke som väckts hos oss under arbetets gång är att det dessutom är viktigt att inte glömma det matematiska innehållet i problemet. Ett rikt problem har ett matematiskt innehåll som hjälper eleverna vidare i sin matematikutveckling och detta innehåll ska kunna kopplas till matematik i andra situationer och sammanhang menar Taflin (2007). Detta gör att det blir mycket för läraren att hålla reda på vid val av problem och därför menar vi att det är viktigt att man tar sig tid att välja problem med omsorg för att vara säker på att problemlösningen stärker eleverna i deras matematiska utveckling. Inför vår empiri mötte vi ett visst motstånd från andra lärare när de fick reda på att observationerna skulle äga rum under problemlösningsektioner. De ansåg sig bland annat inte ha tid att ändra lektionsplaneringen som redan fanns. Vi kan nu på grund av ovan beskrivna svårigheter vid val av problem, till viss del förstå varför lärare väljer att avstå problemlösning som arbetsmetod. Utifrån våra två observerade klasser kan vi dock dra slutsatsen att många av eleverna uppskattar att arbeta med problemlösning och även att Kajsa och Siri har en positiv inställning till det, vilket de även själva framhöll. Den forskning som bedrivits och som vi lyft fram delar av i detta arbete, lyfter också fram arbete med problemlösning som något positivt. Problemlösning framhålls också som en av metoderna som används av de länder som ligger främst i resultaten i exempelvis PISA-rapporten. Även om det är för tidigt att dra några slutsatser och vår undersökning är för liten för att kunna generaliseras, menar vi att om problemlösning skulle kunna lyftas fram som en positiv arbetsmetod och få mer fokus i undervisningen, så som Siri föreslår, skulle kanske Lgr 11 i kombination med Matematiklyftet kunna höja svenska elevers resultat i senare PISA-undersökningar.

Förslag till vidare forskning

Under vår undersökning har det framkommit att flera elever uttrycker en önskan om att inte behöva arbeta med matematikboken fortsättningsvis, då de själva tycker att de lärt sig mer matematik genom problemlösning. Lärarna själva tycker att man kan göra matematiken mer innehållsrik och få med fler delar av det centrala innehållet för matematik ur Lgr 11 genom att arbeta utanför matematikboken. Vi anser att det utifrån vår slutsats och de tankar som nämns om att problemlösning ger eleverna bättre kunskaper inom matematik hade varit intressant att göra en undersökning angående detta. En möjlighet vore att låta en grupp elever arbeta med ett visst kunskapsområde i matematikboken under en begränsad tid och en annan grupp arbeta med samma matematiska kunskapsområde genom problemlösning under samma tid och sedan jämföra elevernas befästa kunskaper om de olika förmågorna. På detta vis går det att undersöka om problemlösning skulle kunna höja elevers resultat i matematik och om det skulle vara värt att minska användandet av matematikboken.

Under våra observationer tyckte vi oss se att Kajsa och Siri på ett positivt sätt använde sina kunskaper om arbete med förmågorna genom problemlösning. Vill vi dock poängtera att mycket av lärarnas kunskaper fortfarande ligger dolda för oss och inte kommer fram i intervjuerna och de relativt få observationer vi haft möjlighet att utföra under denna studie. För att säkerställa att lärarna verkligen utnyttjar den kompetens de besitter om problemlösning, tänker vi att det skulle vara intressant att genomföra en mer omfattande undersökning med en etnografisk vinkel, där undersökaren är mer deltagande tillsammans med eleverna under observationerna.

Referenser

Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik: problemlösning på lågstadiet*. Lund: Studentlitteratur.

Brinkkjaer, U. & Høyen, M. (2013). *Vetenskapsteori för lärarstudenter*. Lund: Studentlitteratur.

Bruun, F. (2013). Elementary Teachers' Perspectives of Mathematics Problem Solving Strategies. *The Mathematics Educator*, 23 (1), 45-59. Hämtad från <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1020068.pdf>

Claesson, S. (2009). *Lärares hållning: klassiska undervisningsidéer och observationer av undervisning*. Lund: Studentlitteratur.

De Lange, J. (2003). Mathematics for Literacy. *Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, 76-89. Hämtad från http://www.maa.org/external_archive/QL/pgs75_89.pdf

Eriksson-Zetterquist, U. & Ahrne, G. (2011) *Intervjuer*. I P. Svensson (Red.), *Handbok i kvalitativa metoder*. (s. 36-57). Malmö: Liber.

Hagland, K., Hedrén, R. och Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Helenius, O. (2006). Kompetenser och matematik. *Nämnamnaren*, 2006 (3). 11-15. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1115_06_3.pdf

Hägglom, L. (2013). *Med matematiska förmågor som kompass*. Lund: Studentlitteratur.

Juter, K. (2014). *De matematiska förmågorna*. Stockholm: skolverket. Hämtad från skolverkets webbplats: <https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:LI64RH5PRO012416?rendition=web>

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (3. rev. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. . Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, D.C.: National Academy Press.

Lester, F. K. (1996) Problemlösningens natur. I R. Ahlström (Red.), *Matematik: ett kommunikationsämne*. (s.85-91). Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Univ.

Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, I., Hellström, T. & Häggström, C-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*. PM 199.

Hämtad från Linköpings Universitet: <http://www.mai.liu.se/~chrbe01/kurser/960L09/tolkning.pdf>

Patel, R. & Davidson, B. (2011). *Forskningsmetodikens grunder: att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. (4. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Polya, G. (2003). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande*. Stockholm: ePan.

Repstad, P. (2007). *Närhet och distans: kvalitativa metoder i samhällsvetenskap*. (4. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2013). *Matematikverkstad: en handledning för laborativ matematikundervisning*. (2. rev. uppl.). Göteborg: Nationellt centrum för matematik, NCM, Göteborgs universitet.

Sakshaug, L. E. & Wohlhuter, K. A. (2010). Journey toward Teaching Mathematics through Problem Solving. *School Science and Mathematics*, 110 (8), 397-409. Doi: 10.1111/j.1949-8594.2010.00051.x

Skolverket. (Uå). *Om ämnet matematik*. Hämtad 2015-04-11

Från: <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat/comment.pdf?subjectCode=MAT&commentCode=ALL&lang=sv>

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Fritzes

Skolverket. (2011b). *TIMSS - 2011 huvudrapport*. Hämtad från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2942>

Skolverket. (2012). *Uppdrag att svara för utbildning*. Hämtad från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.172962!/Menu/article/attachment/U2012_2103_Matt_elyftet.pdf

Skolverket. (2012b). *Skolverkets och SKL:s matematiksatsningar*. Hämtad från www.skolverket.se/kompetens-och-fortbildning/larare/matematiklyftet/skolverkets-och-skl-s-matematiksatsningar-1.178191

Skolverket. (2013). *PISA 2012 (Sammanfattning av rapport 398)*. Hämtad från http://www.skolverket.se/om-skolverket/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2Fblob%2Fpdf3127.pdf%3Fk%3D3127

Skolverket. (2014). *Problemlösning*. Hämtad 2015-04-09 från http://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/faces/training/ak1-3/newlink9459?_adf.ctrl-state=7f2osbldw_2227&_afLoop=1729665734204174

Starrin, B & Svensson, P-G (Red.) (1994). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori*. Lund: Studentlitteratur.

Stenlund Fridell, B. (2011). *Verklighetsanknuten undervisning gör matematiken begriplig*. Hämtad 2015-04-09 från <http://www.skolverket.se/skolutveckling/resurser-for-larande/itiskolan/sa-arbetar-andra/matematik/verklighetsanknuten-undervisning-1.221463>

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur.

Svanelid, G. (2014). *De fem förmågorna i teori och praktik: Boken om The Big 5*. Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2014). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällena till lärande*. Dissertation, Umeå University, Department of Mathematics and Mathematical Statistics, 1102-8300;39.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk- samhällsvetenskaplig forskning*. Hämtad från <http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>

Vygotskij, L. (2001). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos.

Bilaga 1.

Observationsfrågor (efter varje avslutad observation)

- Vad var syftet med lektionen?
- Hur tyckte du att det gick?

Intervjufrågor

- Hur länge har du varit verksam lärare?
 - Hur kom det sig att du ville bli lärare?
 - Vilken utbildning har du?
 - Beskriv hur den utbildning du fick kring undervisning i matematik såg ut.
-
- Har du fått någon kompetensutveckling kring undervisning/bedömning utöver det som ingick i Matematiklyftet?
 - Hur upplevde du den kompetensutveckling du fick genom Matematiklyftet?
 - Upplever du några skillnader i din matematikundervisning efter Matematiklyftet?
 - Hur arbetar du med problemlösning? Vad tänker du kring arbete med problemlösning?
 - Vad anser du om problemlösning som undervisningsmetod?
 - Har Matematiklyftet fått dig att känna dig säkrare i att använda arbete med problemlösning som undervisningsmetod?
 - Hur mycket tid uppskattar du att du lägger på arbete med problemlösning, både lektionstid och planeringstid?
 - Har Matematiklyftet stärkt dig i att lyfta fram förmågorna i undervisningen?
 - Vad anser du om att utveckla förmågorna genom arbete med problemlösning?
 - Vilka strategier använder du för att träna elevernas begreppsförmåga, kommunikationsförmåga samt resonemangsförmåga?
 - Vilka strategier tycker du är lämpliga för eleverna att använda sig av för att utveckla begreppsförmågan, kommunikationsförmågan samt resonemangsförmågan?
 - Upplever du någon skillnad kring elevernas inställning vad gäller intresse/lust när de arbetar med problemlösning jämfört med när de arbetar med matematikboken.

Observationsschema

Allmänt problemlösning	
<p>Hur presenterar läraren problemet för eleverna?</p> <p>Nämns förmågorna under presentationen?</p>	
<p>Får eleverna arbeta med konkret material i problemlösningen?</p> <p>I så fall hur?</p>	
<p>Nämner läraren förmågorna under lektionerna?</p> <p>I så fall hur?</p>	

Observationsschema Kommunikationsförmågan!

Får eleverna:	
Möjlighet att samtala med varandra? Hur samtalar de med varandra?	
Möjlighet att visa/beskriva sina tankegångar? Hur görs detta?	
Möjlighet att använda sig av olika kommunikationsverktyg ? (t.ex. bild, text, tal, symboler och laborativt material mm) Hur används det?	

Observationsschema Begreppsförmågan!

Får eleverna:	
Repetera begrepp?	
Jämföra olika begrepp?	
Diskutera olika begrepps betydelse?	
Förklaras begrepp som används inom aktuellt problem/område?	

Observationsschema Resonemangsförmågan!

Får eleverna:	
Granska sina egna lösningar?	
Granska kamraters lösningar?	
Argumentera för sina lösningar?	
Diskutera olika lösningar med varandra?	
Tid till eget tänkande?	

Bilaga 3.

Medgivandebrev

Hej!

Vi är två lärarstudenter vid Högskolan Väst som precis har påbörjat vårt examensarbete. Vi skriver om problemlösning i matematik. Vi har för avsikt att observera lärare och elever i klassrummet under ca tre lektioner med problemlösning. Vi kommer inte att samtala med vare sig elever eller läraren utan bara sitta och observera. Om möjligt kommer vi att spela in observationstillfällena, för att säkerställa att vi inte missar något. Det som spelas in kommer endast att lyssnas på av oss två.

Vi utgår från Vetenskapsrådets forskningsetiska principer vilket innebär följande:

Elevens deltagande i undersökningen är frivilligt och om han/hon så önskar, kan han/hon avbryta sitt deltagande när som helst.

Uppgifter som samlas in under undersökningens gång kommer att hanteras helt konfidentiellt, vilket innebär att ingen utomstående kan ta del av elevens eller andras personuppgifter eller övrig information.

Insamlad data och resultat kommer endast användas i denna forskningsstudie.

Har ni några frågor eller funderingar får ni gärna höra av er till oss via mail eller telefon enligt nedan.

Vi ser fram emot spännande observationer!

Med vänliga hälsningar

Camilla Bengtler
Tel nr: 0760-175699

Mail: camilla.bengtler@student.hv.se

Therese Söfting Bergstedt
Tel nr: 0736-210579

Mail: therese.softing-bergstedt@student.hv.se

Om ert barn får delta i vår forskningsstudie så *ringa in* JA på talongen nedan. Svara senast måndag den 27/4. Tack på förhand!

Mitt barn får delta i forskningsstudien om problemlösning.

JA

NEJ

Datum och underskrift av vårdnadshavare

Bilaga 4.

Missivbrev

Hej!

Vi är två lärarstudenter vid Högskolan Väst som precis har påbörjat vårt examensarbete. Vi skriver om problemlösning i matematik. Vi har för avsikt att observera lärare och elever i klassrummet under ca tre lektioner med problemlösning. Vi vill även gärna intervjua dig som lärare efter lektionerna samt en lite längre intervju när vi fullgjort våra observationer. Om möjligt kommer vi att spela in intervju och observationer (endast ljud).

Vi utgår från Vetenskapsrådets forskningsetiska principer vilket innebär följande:

Ditt deltagande i undersökningen är frivilligt och om du så önskar, kan du avbryta ditt deltagande när som helst.

Uppgifter som samlas in under undersökningens gång kommer att hanteras helt konfidentiellt, vilket innebär att ingen utomstående kan ta del av dina eller andras personuppgifter eller övrig information.

Insamlad data och resultat kommer endast användas i denna forskningsstudie.

Har du några frågor eller funderingar får du gärna höra av dig till oss via mail eller telefon.

Vi hoppas att du vill delta i vår studie!

Med vänliga hälsningar

Camilla Bengtler

Tel nr: 0760-175699

Mail: camilla.bengtler@student.hv.se

Therese Söfving Bergstedt

Tel nr: 0736-210579

Mail: therese.softing-bergstedt@student.hv.se

Bilaga 5.

Tre kattmammor har kattungar samtidigt.

Hur många kattungar kan varje kattmamma ha om det sammanlagt finns

- a) 3 kattungar
- b) 9 kattungar
- c) 10 kattungar



Bilaga 6.

Beskrivning av individuella bidrag i examensarbetet

Författare 1: Therese Söfving Bergstedt

Vår utgångspunkt var att ta lika stort ansvar av varje del i arbetet. Vi planerade och strukturerade vårt arbete tillsammans. Individuella sökningar gjordes gällande artiklar och litteratur, men användes sedan gemensamt. Vi gjorde observationer och intervjuer på var sin skola men gjorde gemensamt analysen av det insamlade materialet. Vi sammanställde och sammanfattade varje del av vårt arbete gemensamt via Skype.

Författare 2: Camilla Bengtler

Vår utgångspunkt var att ta lika stort ansvar av varje del i arbetet. Vi planerade och strukturerade vårt arbete tillsammans. Individuella sökningar gjordes gällande artiklar och litteratur, men användes sedan gemensamt. Vi gjorde observationer och intervjuer på var sin skola men gjorde gemensamt analysen av det insamlade materialet. Vi sammanställde och sammanfattade varje del av vårt arbete gemensamt via Skype.

Högskolan Väst
Institutionen för individ och samhälle
461 86 Trollhättan
www.hv.se