Skriftlig huvudräkning eller Standardalgoritm?

- Undervisningens påverkan på elevers val av strategi vid beräkningar i addition.

Zandra Eriksson **Amanda Rosén**

Examensarbete 1, 15 hp
Lärarprogrammet
Institutionen för individ och samhälle
Vårterminen 2015

Arbetets art: Examensarbete 15 hp, Lärarprogrammet

Titel: Skriftlig huvudräkning eller Standardalgoritm? - Undervisningens påverkan på elevers val av strategi vid beräkningar i addition.

Engelsk titel: Mental computation or the Standard algorithms? – The influence of teaching on pupils' choice of strategy for calculation in addition.

Sidantal: 31

Författare: Zandra Eriksson & Amanda Rosén

Examinator: Cecilia Thorsén

Datum: Juni 2015

Sammanfattning

Bakgrund: Granskar man TIMSS 2011 rapport (Skolverket, 2012) ser man att elevernas resultat inom matematik jämfört med andra länder sjunker när det gäller elevernas matematiska förmåga. Av de fyra områdena inom matematik i årskurs fyra är det främst inom Taluppfattning och aritmetik samt Geometri. Sedan TIMSS 2011 publicerades har det förts en debatt kring om man ska undervisa i standardalgoritmer eller i skriftlig huvudräkning.

Syfte: Syftet med denna studie är att undersöka på vilket sätt elevernas eget användande av beräkningsstrategier vid lösning av numeriska uppgifter i addition påverkas av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning.

Metod: I studien har vi använt oss av både kvalitativa och kvantitativa datainsamlingsmetoder. Den kvalitativa datainsamlingsmetoden bestod av lärarintervjuer och den kvantitativa datainsamlingsmetoden bestod av ett kunskapsprov gällande matematikuppgifter som eleverna skulle besvara. Resultaten för de båda datainsamlingarna analyserades sedan både kvalitativt och kvantitativt.

Resultat: Resultatet visar att i utvecklandet av elevernas matematiska förmåga är det viktigare att undervisningen byggs på en begreppslig förståelse än vilka beräkningsstrategier läraren undervisar i.

Innehållsförteckning

Inledning

I den senaste rapporten från TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study, Skolverket, 2012) framkommer det att svenska elever i årskurs åtta och fyra har försämrats i matematik både över tid och jämfört med andra länder. I samma rapport framgår det också att det knappt sker någon utveckling mellan årskurserna. Skolverkets (2012) bedömning är att en möjlig förklaring till att det nästan inte sker någon utveckling mellan årskurserna är att "... de redskap som eleverna får i de lägre årskurserna inte är tillräckliga för ett gynna ett lärande i de högre årskurserna" (s.13). Inom ämnet matematik granskar rapporten fem delområden, vilka är Taluppfattning och aritmetik, Geometri, Algebra, Datapresentation samt Statistik och sannolikhet. Av dessa områden visar rapporten att det är Taluppfattning och aritmetik samt Geometri som är de områden som eleverna i årskurs fyra är sämst på. Av dessa två områden är det i sin tur Taluppfattning och aritmetik som vi valt att fördjupa oss inom i vår studie.

Enligt de nationella kvalitetsgranskningar som gjordes år 2001-2002 av Skolverket (2003) framkom det att de klassrum som hade observerats vid undersökningen visade på att elever till stor del kopierade metoder som hade lärts ut av andra samt att eleverna själva inte kunde konstruera egna metoder. Även Bentley (2012) säger att elever idag är vana vid att lära sig nya matematiska begrepp genom en "gör-så-här-orienterad" undervisning. Något som skapat en negativ cirkel då eleverna förhindras att få sin chans att utveckla begreppslig förståelse. Istället menar han att man ska fokusera på en konceptuell inriktning där eleverna får en begreppslig förståelse. North Whitehead (1911, refererad i Bentley & Bentley, 2011) lägger till en ytterligare aspekt på detta genom att uttrycka att:

> Anledningen till matematikens misslyckande att leva upp till sitt rykte som en stor vetenskap är att de fundamentala idéerna inte förklaras för eleven utan döljs i de mekaniska procedurer, som har skapats för att underlätta presentationen av dem. Således befinner sig den olycklige eleven kämpande med en massa detaljer som inte sätt samman som eller förklaras av något generellt begrepp (s.68).

Förr skedde ⅔ av all matematikundervisning i skolan genom att elever räknade med algoritmer tysta var för sig (Marklund, 1993). Till skillnad från den enighet kring det enskilda räknandet med algoritmer som tidigare fanns, finns det idag en debatt kring om undervisning av standardalgoritmer eller skriftlig huvudräkning gynnar eleven bäst. Rockström (2000) är en av dem som är oroad över den tysta räkningen med algoritmer, då hon i en tidigare studie undervisade i skriftlig huvudräkning för elever som tidigare enbart räknat med standardalgoritmer. Elevernas respons var då att detta var mycket enklare och de undrade över varför de inte fått lära sig skriftlig huvudräkning tidigare.

I vår studie har vi valt att undersöka två lärare och deras klasser för att ta reda på om det finns en påverkan av att elever undervisas i skriftlig huvudräkning och om det ligger en betoning på begreppslig förståelse eller inte. Kunskap om vilken påverkan undervisning i skriftlig huvudräkning har kan bidra med ytterligare kunskaper om undervisningen i aritmetik på mellanstadiet för att kunna förbättra elevernas matematiska förmåga.

Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka på vilket sätt elevernas eget användande av beräkningsstrategier vid lösning av numeriska uppgifter i addition påverkas av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning. Ur detta syfte har dessa tre frågor trätt fram:

- I vilken utsträckning uppfattar läraren att denne bygger undervisningen i matematik på en begreppslig förståelse?
- Vilka beräkningsstrategier har läraren gått igenom med eleverna?
- Vilka strategier i skriftlig huvudräkning använder sig eleverna av och hur stor del är användningen av standardalgoritmen bland eleverna?

Läroplanen

Matematikundervisningen ska enligt kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) bidra till att eleverna utvecklar ett intresse i ämnet och en förmåga att använda sina matematiska kunskaper. I kursplanens syfte förklaras att ett syfte med undervisningen är att eleverna ska kunna reflektera över och värdera olika val i sina beräkningar samt att föra matematiska resonemang. Ytterligare ett syfte är att eleverna ska få en god kännedom kring grundläggande matematiska begrepp. Eleverna ska även få möjlighet att utveckla sin förmåga i att kunna "välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter" (s.63).

I kursplanens centrala innehåll för årskurs fyra till sex står det att undervisningen ska innehålla metoder för beräkning med naturliga tal och enkla tal i decimalform både vid huvudräkning och i skriftliga beräkningar (Skolverket, 2011). Kursplanen förespråkar alltså ingen specifik beräkningsmetod inom addition.

I kunskapskraven för årskurs sex beskrivs mål som eleverna ska ha nått vid slutet av vårterminen. För att få betyget E (det lägst godkända) är två av målen att eleverna ska kunna välja och använda i huvudsak fungerade matematiska metoder med viss anpassning till uppgiftens karaktär samt att eleverna ska kunna samtala om tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerade sätt (Skolverket, 2011).

Läroplanen förordar alltså ingen särskild metod utan säger enbart att eleverna genom undervisningen ska få en begreppslig förståelse och kunna göra strategiska val samt att de ska utveckla ett intresse för matematik.

Forskningsbakgrund
I forskningsbakgrunden kommer dessa fyra huvudrubriker att tas upp: "Algoritmer", "Förkunskaper", "Lärares undervisning" samt "Elevers missuppfattningar och misstag".

Algoritmer
Det som klassas som algoritmer är olika skriftliga metoder, det vill säga både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning. Både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning kan i sin tur båda användas som huvudräkningsstrategier (Bentley & Bentley, 2011). Skillnaden är att standardalgoritmen alltid skrivs ut på exakt samma sätt oberoende av uppgiftens utseende till skillnad från skriftlig huvudräkning.

Ett exempel på standardalgoritmen:

$$\begin{array}{r} 47 \\ \underline{+39} \\ 86 \end{array}$$

Skriftlig huvudräkning går istället ut på att eleverna skriver ned sina resonemang i mellanled när de gör sin uträkning av uppgiften. Mellanleden är de olika steg man delar upp uppgiften i fram tills att man fått fram svaret. Utskrivandet av mellanleden ses här som ett redskap för att utveckla elevernas förståelse. Antalet mellanled som behöver skrivas ned varierar efter uppgiftens svårighetsgrad (Rockström, 2000). Bentley och Bentley (2011) säger att mellanleden är det svåra i skriftlig huvudräkning på samma sätt som minnessiffrorna är det svåra i standardalgoritmen.

Ett exempel på en av strategierna i skriftlig huvudräkning:
47 + 39 = 47 - 1 + 39 + 1 = 46 + 40 = 86

Standardalgoritmen
Flera elever ser matematiken som något tröttsamt, tråkigt och inte speciellt utvecklande. Enligt Löwing (2008) samt Marklund (1993) kommer denna negativa uppfattning ifrån den felaktiga användningen av standardalgoritmen. Den felaktiga användningen innebär att eleverna introduceras till standardalgoritmen som en mekanisk procedur innan de har en begreppsförståelse vilket leder till att eleverna utan förståelse bara tar efter en av läraren introducerad metod (Löwing & Kilborn, 2003). Detta leder i sin tur till att vissa negativa effekter framträtt. Dessa negativa effekter är att eleverna inte får en god taluppfattning, vilket bland annat innebär avsaknad i förståelsen av positionssystemet (Rockström, 2000; Varol & Farran, 2007). McIntosh (2008) säger att enbart arbete med standardalgoritmen leder till att elever ser uppgifterna som problem de ska utföra med fasta regler så snabbt som möjligt, med det enda målet att svaret ska stämma överens med facit. De reflekterar alltså inte kring sin tankeprocess som leder fram till svaret. Däremot anser Johansson (2006) att det är en fördel att eleverna enbart lär sig standardalgoritmen som en mekanisk inlärd procedur, eftersom skolan då ger eleverna en enhetlig undervisning där alla får ta del av samma kunskap.

Enligt både McIntosh (2008) och Rockström (2000) har en undervisning med stort fokus på standardalgoritmen resulterat i att elever ofta även tänker sig standardalgoritmens uppställning i huvudet vid huvudräkning vilket många gånger kan leda till fel uträkning. Däremot i Bentley och Bentleys (2011) analys av ett kompetensutvecklingsprojekt i en kommun påpekas motsatsen till detta. I deras undersökning visade det sig att eleverna blandade ihop mellanleden i skriftlig huvudräkning till fel typ av uppgifter och att lärarna efter detta valde att lära ut standardalgoritmen istället. Detta resulterade i att eleverna till sist kunde utföra beräkningarna korrekt. Även andra forskare anser att metoden kan fungera som ett bra hjälpmedel till uppgifter där skriftlig huvudräkning skulle innebära en för komplicerad procedur (Marklund, 1993; Rockström, 2000). Detta sätt att använda standardalgoritmen på visar sig i Foxman och Beishuizen (2002) analys, då eleverna oftare valde standardalgoritmen som metod när de inte kände sig tillräckligt säkra på sin egen begreppsförståelse men till trots hade lärt sig rutinen i standardalgoritmen. Mellin-Olsen (1989) påpekar också att elever ska få utnyttja standardalgoritmen så länge de har rätt förståelse för användandet av den.

Flertalet forskare tar upp att standardalgoritmen ska införas först senare i undervisningen (Mardjetko & Macpherson, 2007; Reys & Reys, 1995). McIntosh (2008) förklaring till när detta ska ske är att "Den rätta tiden att lära sig tvåsiffrig addition med papper och penna är när vi redan vet hur man gör samma uträkning i huvudet" (s.127). En undersökning som har gjorts kring senare introduktion av standardalgoritmen är bland annat Hedréns (1999) studie, där eleverna fram tills årskurs sex enbart arbetat med skriftlig huvudräkning enligt Birgitta Rockströms bok *Matteboken*. Det var alltså först i årskurs sex som eleverna fick möta standardalgoritmen för första gången. Det visade det sig då att de flesta av eleverna ändå behöll de tidigare använda strategierna i skriftlig huvudräkning.

Skriftlig huvudräkning

Enligt Rockström (2000) är räknelagarna det enda som begränsar eleverna i skriftlig huvudräkning. Rockström (2000) talar också om att skriftlig huvudräkning öppnar upp elevernas ögon till att se på uppgifter på olika sätt, som gör att de får möjlighet att finna enklare lösningar på den uppgift de har framför sig. Målet med skriftlig huvudräkning är just att hitta den enklaste vägen till lösningen, vilket innebär en metod som ger minst antal mellanled och på så vis leder till den enklaste och snabbaste lösningen (Hickendorff, Van Putten, Verhelst & Heiser, 2010; Löwing & Kilborn, 2003). Beroende på uttryckets utseende kan vissa uppgifter lösas med olika strategier, därför ska eleverna kunna anpassa val av skriftlig huvudräkningsstrategi utifrån uppgiftens karaktär, vilket innebär att de behöver ha kunskap om och förståelse för ett flertal olika strategier (Löwing, 2008). I början är det särskilt viktigt att eleverna skriver ut alla steg i mellanledet för att träna tankegången och förståelsen för de matematiska begreppen. I mellanleden kan eleverna ändra uttrycket så många gånger de vill (Rockström, 2000). Rockström (2000) säger dessutom att "Det nerskrivna mellanledet ger läraren möjlighet att följa elevens tankegång och få en uppfattning om hur elevens förmåga utvecklas" (s.11). På så sätt kan skriftlig huvudräkning göra att ett felaktigt tänkande hos eleven uppmärksammas och korrigeras genom att eleverna skriver ut mellanleden i sina uträkningar.

Murphys (2004) undersökning, om det går att undervisa i skriftlig huvudräkning genom genomgång i helklass, visade att genomgången av en skriftlig huvudräkningsstrategi ledde till utveckling av elevernas skriftliga huvudräkning överlag. Undersökning visade också att hur den utvalda strategin tas emot av eleverna påverkas av deras tidigare matematiska kunskaper och hur långt de har kommit i sin matematiska förståelse. Detta innebär att utan tidigare nödvändiga kunskaper, bland annat likhetstecknets betydelse, kan eleverna inte tillgodogöra sig den strategi som läraren undervisar i. Burton (1999, refererad i Murphys, 2004) säger också att en för tidig genomgång av en skriftlig huvudräkningsstrategi för vissa elever inte ger någon förståelse, utan det blir istället att eleverna gör mer eller mindre lyckade försök att ta efter för dem osammanhängande fakta.

Hedrén (2006) säger att om man tvingar på elever en skriftlig huvudräkningsstrategi, utan att den baseras på en tidigare begreppsförståelse, är det lika illa som att enbart använda standardalgoritmen, då detta också leder till ett mekaniskt användande. Enligt Varol och Farran (2007) har elever det mycket svårare att komma på egna skriftliga huvudräkningsstrategier senare om de har fått lära sig enbart en specifik beräkningsmodell tidigare, på grund av att eleverna redan har automatiserat den första modellen. Det är med andra ord mycket bättre om eleverna får chans till att skapa egna metoder redan från början. Elever som har fått möjlighet att skapa egna skriftliga huvudräkningsstrategier har också visat på en större korrekthet när det gäller att lösa olika uppgifter. Även Hickendorff et. al. (2010) säger att lärare ska ge eleverna möjlighet till att finna skriftliga huvudräkningsstrategier, då det ofta leder till att eleverna samtidigt lär sig att dra matematiska slutsatser och att förstå olika resonemang.

Både analysen av Foxman och Beishuizen (2002) och undersökningen av Hedrén (1999) visar på att eleverna klarar av att skapa egna skriftliga huvudräkningsstrategier. Att elever får tänka ut lösningar själva leder dessutom till ökat självförtroende inom matematiken enligt Rockström (2000), och går hand i hand med kursplanens syfte som är att "Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang" (Skolverket, 2011, s.62).

Förkunskaper

Nedan presenteras kort de förkunskaper eleverna behöver ha innan de introduceras för olika beräkningsstrategier.

God taluppfattning

En god taluppfattning består enligt Reys et al. (1995) definition av sex aspekter. Av dessa är det fyra aspekter som är av betydelse vid skriftlig huvudräkning. Dessa aspekter är att man har en förståelse av tals betydelse och storlek, förståelse för och användning av ekvivalenta (lika värde) uttryck och representationer av tal, förståelse av operationers (addition, subtraktion m.m.) innebörd och funktion samt strategier för beräkning. Med andra ord innebär en god taluppfattning en förståelse för positionssystemet, likhetstecknets betydelse, automatiserande av additionstabellen samt förståelse för olika beräkningsstrategier. Löwing (2008) säger att en god taluppfattning är nödvändig för att kunna utföra beräkningar och Hickendorffs et. al. (2010) studie visar att elever med god taluppfattning har lättare att växla mellan användning av olika skriftliga huvudräkningsstrategier samt standardalgoritmen. Studien visade också att elever som inte har en god taluppfattning finner det svårare med matematiska beräkningar och att de mer sällan får fram rätt svar på uppgiften.

Positionssystemet

Positionssystemet bestämmer siffrornas placering och deras värde, vilka motsvaras av benämningarna tiotal, ental, tiondel med mera (Bentley & Bentley, 2011).

Automatiserat additionstabellen

Att ha automatiserat additionstabellen innebär att eleverna med flyt ska kunna utföra alla kombinationer av addition (Löwing & Kilborn, 2003) som finns i lilla och stora additionstabellen. Lilla additionstabellen innehåller all addition av två ental som sker utan tiotalsövergång medan det i stora additionstabellen sker en tiotalsövergång. En viktig förutsättning är dock att automatiseringen ska byggas på god taluppfattning och att automatiseringen är sista steget i inlärningen av tabellen (Rockström, 2000). Om eleverna har automatiserat denna tabell, gör det att eleverna kan lägga mer fokus på stegen i mellanleden i skriftlig huvudräkning (Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008). Enligt Bentley (2012) krävs det också att eleverna har automatiserat de aritmetiska tabellerna för att kunna följa med i genomgången av en beräkningsstrategi.

Likhetstecknets statiska betydelse

Likhetstecknets statiska betydelse innebär att värdet ska vara lika stort på båda sidor om tecknet (Bentley & Bentley, 2011). Detta är mycket viktigt eftersom det är denna förståelse som gör det möjligt att förenkla uttryck, vilket är en viktig funktion i skriftlig huvudräkning (Rockström, 2000).

Lärares undervisning

Enligt Berliner (1988, refererad i Bentley & Bentley, 2011) är definitionen av en kompetent lärare att denne är medveten om sina val av metoder och agerande i klassrummet. Medvetenheten hos läraren är särskilt viktig eftersom en lärares syn på matematik överförs, framförallt i tidig ålder, till eleverna enligt Bentley (2012). Detta sker på så vis att lärarens perspektiv tenderar att styra undervisningen och elevernas uppmärksamhet mot det som de kommer att uppfatta som matematik under resten av sin skoltid.

Ett tips i undervisningen kring just skriftlig huvudräkning är enligt Löwing och Kilborn (2003) att eleverna ska få möjlighet att samtala med varandra kring de skriftliga huvudräkningsstrategier de använder sig av, då det öppnar upp för en större förståelse samt ett bredare utbud för eleverna. Birgitta Rockström (2000) påpekar också att i och med att eleverna genom samtal med andra måste förklara sina matematiska tankegångar i ord, gör det att de utvecklar sin förmåga att generalisera och abstrahera vilket är grunden i all matematik. Ytterligare något som är användbart i undervisningen i skriftlig huvudräkning, är att läraren har en konceptuell inriktning i sin undervisning.

Konceptuell inriktning

I en konceptuellt inriktad undervisning ligger fokus på förståelse av matematiska begrepp, det är begreppen eleverna först och främst ska få en förståelse för. Med andra ord ska matematikundervisningen baseras på en begreppslig förståelse. Utifrån begreppen kan eleverna sedan lära sig och få förståelse för strategierna i skriftlig huvudräkning. Den konceptuella inriktningen innefattar därför både konceptuell (begrepp) och procedurell (strategier) kunskap (Bentley & Bentley, 2011). I den konceptuella inriktningen läggs även stor vikt vid att den kunskap som eleverna skaffar sig ska kunna transfereras, vilket innebär att de kunskaper som lärts in i en viss kontext ska kunna överföras och tillämpas i en annan bekant kontext. I en konceptuell syn på matematikundervisningen vill man gå bort ifrån den negativa cirkeln av en “gör-så-här-orienterad” undervisning och en avsaknad av förkunskaper hos eleverna för nästkommande del i undervisningen (Bentley, 2012).

För att klara av att utföra skriftlig huvudräkning och alla dess mellanled krävs det att eleverna har en god begreppsförståelse (Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008). Enligt Varol & Farran (2007) är det också de elever som har en god begreppsförståelse som är de som har störst möjlighet att skapa egna skriftliga huvudräkningsstrategier. McIntosh (1995) säger också att dessa elever även kan använda sig av fler strategier. Att bygga matematikundervisningen på begreppslig förståelse påverkar även elevernas lust att lära i positiv inriktning, vilket den nationella kvalitetsgranskningen som gjordes år 2001-2002 av Skolverket (2003) visar genom att i de gjorda intervjuerna uttrycker eleverna ofta att matematik är roligt när de förstår. Rapporten från TIMSS 2011 (Skolverket, 2012) visar också att de elever som gillar matematik, har ett högt självförtroende inom ämnet samt värdesätter ämnet högt, är de elever som presterar bäst. Svenska elever är däremot några av dem som värdesätter matematik minst jämfört med de andra länderna i EU/OECD, och från årskurs fyra till årskurs åtta försvinner den positiva inställning samt självförtroendet eleverna har till att lära sig matematik, vilket forskare fortfarande undersöker den egentliga anledningen till.

Elevers missuppfattningar och misstag

Vilka missuppfattningar och misstag som råder hos eleverna i klassrummet är också viktiga för att förstå kopplingen mellan undervisning och elevers användning av skriftlig huvudräkning. En del i detta är de så kallade strukturella misstag vilket innebär att ett och samma misstag upprepas återkommande hos flera av eleverna i klassen, och som därför har sin grund i hur läraren utformar sin undervisning (Bentley & Bentley, 2011). Bentley och Bentley (2011) fortsätter med att om elever råkar ut för dessa kontinuerliga misstag på grund av lärarens undervisning, krävs det mer åtgärder för att rätta till de felaktiga strategierna, än vad det hade krävts för att lära ut rätt från början. Anledningen är att även fel automatiseras och lagras i minnet vilket leder till att en elev som gjort samma fel flera gånger kommer att fortsätta göra samma fel på liknande uppgifter eftersom det är så eleven har lärt sig. De tar även upp att beroende på om eleven använder rätt skriftlig huvudräkningsstrategi till fel uppgift eller om eleven använder strategin fel till rätt uppgift behövs olika åtgärder för att ge eleven rätt förståelse.

McIntosh (2008) nämner även han ett liknande problem men med en annan ingång, när han säger "... att börja med förenklade tal kan ge upphov till missuppfattningar, eftersom bristfällig förståelse kan ge rätt resultat" (s.128). Anledningen till att detta ställer till problem för eleven, är för att den av eleven felaktigt uppfattade strategin inte är generell, vilket innebär att den inte kan tillämpas på andra typer av uppgifter (Stavy & Tirosh, 2000, refererad i Bentley & Bentley, 2011). Just denna typ av misstag kallas övergeneralisering. Samma sorts misstag kan också ha sitt ursprung i att läraren har använt sig av en övergeneralisering till en specifik uppgift i syfte att underlätta för eleverna för just denna uppgift, men att eleverna istället kan ta detta som generell kunskap och använder det som en regel även vid andra uppgifter. Dessa felaktiga regler behöver upptäckas och rättas till av läraren, vilket bland annat är möjligt i de utskrivna mellanleden i elevernas skriftliga huvudräkning (Bentley & Bentley, 2011). Ett exempel på en vanlig övergeneralisering inom addition, är att talen i standardalgoritmen ska ställas upp med rak högerkant, vilket gör att i uppgifter som till exempel 32 + 2,86 hamnar entalet över hundradelen, istället för att eleverna får lära sig att ental skrivs över ental, tiotal över tiotal och så vidare. Bentley och Bentley (2011) tar även upp ytterligare en svårighet som hör ihop med övergeneraliseringar, vilket är att elever behöver inte antingen ha en fel eller rätt uppfattning om ett begrepp, utan kan ha flera olika parallella uppfattningar om ett och samma begrepp. På grund av detta behöver det inte innebära att en elev inte har en viss kunskap bara för att denne inte klarat av en uppgift, utan att det enbart är för att den korrekta uppfattningen, av de parallella uppfattningarna, inte kom fram just denna gång. På samma sätt kan man inte veta om en elev som svarar korrekt på en uppgift samtidigt fortfarande har andra parallella uppfattningar som inte är korrekta. Bentley och Bentleys (2011) slutsats är att om man introducerar flera förklaringar för ett och samma begrepp försvårar detta för eleverna att få en förståelse för begreppet.

Enligt Bentley och Bentley (2011) består flera läroböcker av övergeneraliseringar samt uppgifter som är utformade för att passa just dessa generaliseringar. Om eleverna då enbart får tillgång till att använda sig av läroboken i undervisningen, gör det att de inte kommer att klara av liknande uppgifter i andra sammanhang. Rapporten från TIMSS 2011 (Skolverket, 2012) visar dessutom att läroboken används mer i matematikundervisningen i Sverige än i andra länder inom EU/OECD.

I tidigare undervisning har standardalgoritmen styrt och i rapporten från TIMSS 2011 (Skolverket, 2012) visar resultaten att elever i årskurs fyra successivt blivit sämre på aritmetik. Forskning har visat att lärares undervisning har stor betydelse för elevernas matematiska förståelse samtidigt som det har diskuterats om en lärares möjlighet att undervisa i skriftliga huvudräkningsstrategier. Flertalet forskare visar också på vikten av att bygga undervisningen på en begreppslig förståelse och undvika användandet av övergeneraliseringar. Utifrån detta har vi funnit det intressant att i vår studie undersöka hur elever påverkas av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning jämfört med om de inte fått undervisning i det.

Teoretiska utgångspunkter

Under denna rubrik kommer vår teoretiska utgångspunkt att presenteras. Vi har tagit stöd av begreppen ”Genomförd läroplan” samt ”Uppnådd läroplan” ur TIMSS 2011 ramverk (Skolverket, 2012) samt sju skriftliga huvudräkningsstrategier.

Genomförd läroplan/Uppnådd läroplan

Genomförd läroplan innebär att man ser till hur läroplanen tillämpas av läraren i undervisningen. Uppnådd läroplan menas med vad eleverna har tillägnat sig genom undervisningen (Skolverket, 2012). Dessa begrepp används som struktureringsverktyg i vårt upplägg av uppsatsen. I vår undersökning är det de två första av våra frågeställningar som berör den genomförda läroplanen medan den tredje handlar om den uppnådda läroplanen.

Skriftliga huvudräkningsstrategier

Det finns flera författare som har kategoriserat olika strategier som kan användas vid beräkningar med addition. Utifrån dessa författare har vi fått fram sammanlagt sju stycken olika strategier i skriftlig huvudräkning som vi valt att benämna som *varje talsort för sig, flytta över, ombytt ordning, hundra-/tiokamrater*, *kompensering, räkna från största talet* och *uppdelning.* Till exemplen nedan av vardera strategin återfinns de författare som tar upp strategin i sin bok, fast ibland under ett annat namn. Foxman och Beishuizen (2002) har gjort en mer övergripande kategorisering (än författarna nedan) och delar upp strategierna i skriftlig huvudräkning utefter om beräkningarna i mellanleden sker genom att båda talen delas upp i olika talsorter (*Split number approach*) eller om det ena talet behålls i sin helhet (*Complete number approach*). Uppdelning av våra beräkningsstrategier i dessa kategorier blir därför att under *Complete number approach* finns strategierna *flytta över, ombytt ordning, hundra-/tiokamrater, kompensering, räkna från största talet.* I kategorin *Split number approach* återfinns därför istället *varje talsort för sig* och *uppdelning*. Foxmans och Beishuizen (2002) kommer även fram till att de strategier som behåller det ena talet i sin helhet är det som kräver mest begreppsförståelse men också de som har högst lösningsfrekvens.

Beräkningsstrategierna - Complete number approach

Flytta över innebär att man tar bort ett fåtal ental eller tiotal från det ena talet och lägger till samma ental på det andra talet, för att få hela hundra-/tiotal att arbeta med. Därefter adderar man de två talen.

Exempel:
398 + 574 = 398 + 2 + 574 - 2 = 400 + 572 = 972

(Bentley & Bentley, 2011; Rockström, 2000)

Ombytt ordning innebär att man adderar talen i en annan ordning än vad de står i från början i uppgiften, för att få hundra-/tiotalskamrater vilka är enklare att räkna med.

Exempel:
48 + 35 + 22 + 45 = 48 + 22 +35 +45 = 70 + 80 = 150

(McIntosh, 2008; Rockström, 2000)

Hundra-/Tiokamrater innebär att man gör om det ena talet till närmaste hundra- eller tiokamrat, för att få ett enklare tal att räkna utifån.

Exempel:
56 + 27 = 56 + 4 + 23 = 60 + 23 = 83
(Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008; Rockström, 2000)

Kompensering innebär att talen görs om till närmaste hundra- eller tiokamrat för att sedan adderas. Därefter subtraherar man summan av förändring ifrån summan av de förenklade talen.

Exempel:
197 + 399 + 98 = 200 - 3 + 400 -1 +100 - 2 = 700 - 6 = 694
(Bentley & Bentley, 2011; McIntosh, 2008; Rockström, 2000)

Räkna från det största talet innebär att man utifrån det största talet i uppgiften bitvis lägger till det mindre talet, för att göra beräkningarna enklare.

Exempel:
18 + 73 = 73 + 10 +8 = 83 + 8 = 91
(Löwing, 2008; McIntosh, 2008)

Beräkningsstrategierna - Split number approach

Varje talsort för sig innebär att man först adderar hundratalen, därefter tiotalen, sedan entalen, därefter tiondelarna och så vidare. Sedan adderas vardera dels summa ihop till slutsumman. Detta görs för att få enklare beräkningar än den ursprungliga. Denna beräkningsstrategi går att använda vid alla additionsuppgifter (Rockström, 2000).

Exempel:
165 + 43 + 231 = 100 +200 + 60 +40 +30 + 5 +3 + 1 = 300 + 130 + 9 = 439
(Bentley & Bentley, 2011; McIntosh, 2008; Rockström, 2000)

Uppdelning innebär att man delar upp det ena eller båda talen och istället adderar dessa mindre delar för att få enklare beräkningar att utföra.

Exempel:
46 + 7 = 40 +6 +6 + 1 = 40 + 12 + 1 = 52 + 1 = 53
(Bentley & Bentley, 2011)

Dessa olika skriftliga huvudräkningsstrategier kommer vi att använda oss av som analysverktyg i bearbetningen av vår införskaffade empiri i form av kategorisering av de undersöktas lösningsresonemang.

Metod
I detta stycke beskrivs våra metoder vilka var intervju och kunskapsprov. Med intervjun ville vi få fram innehållet i lärarens undervisning alltså vad den *genomförda läroplanen* är. Med kunskapsprovet ville vi istället få reda på de beräkningsstrategier eleverna använder sig av alltså den *uppnådda läroplanen*. Vi beskriver även hur vi gick tillväga i vårt val av skolor och klasser, samt urvalet och formuleringen av frågor och uppgifter till såväl intervjun som kunskapsprovet. Stycket avslutas med de etiska ställningstagande vi gjort.

Urval
Inför vår undersökning kontaktade vi två lärare, på två olika skolor, som vi tidigare har haft kontakt med. Den ena klassen (Klass A) går på en kommunal skola i en mindre kommun och den andra klassen (Klass B) är en friskola i en större kommun. Läraren (Lärare A) från den kommunala skolan är behörig lärare från förskoleklass upp till årskurs nio och har haft denna klass sedan skolstarten i årskurs fyra. Hon var även en av deltagarna i den kompetensutveckling i en kommun som Bentley och Bentley (2011) genomfört och analyserat. Läraren (Lärare B) från friskolan är behörig lärare från förskoleklass upp till årskurs nio och har haft klassen sedan skolstarten i årskurs fyra. På grund av vårt syfte behövde vi jämföra en klass som fått undervisning i skriftlig huvudräkning med en klass som inte fått det. Därav vårt val av lärare, eftersom vi visste att Lärare B undervisade i både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning, medan Lärare A enbart undervisade i standardalgoritmen. Båda lärarna undervisade i årskurs fyra vilket gör det möjligt för oss att jämföra våra resultat med TIMSS 2011 (Skolverket, 2012). Däremot är vi medvetna om att i och med vårt syfte med att se undervisningens påverkan på eleverna hade det varit mer lämpligt att utföra vår studie i årskurs fem, eftersom läraren hade haft eleverna en längre tid och att det då hade framgått tydligare just denna lärares undervisnings påverkan på elevernas användning av skriftlig huvudräkning.

Kontakten med lärarna togs via mail. Därefter besökte vi lärarna för att lämna ut vårt missivbrev (se *bilaga 1*) som dels innehöll godkännande av intervju och godkännande av genomförandet av kunskapsprovet i klassen. Vid mötet med vardera läraren bestämde vi också datum och tid för genomförandet av våra undersökningar. Lärare A besökte vi först och då bestämdes det att vi en vecka senare skulle få genomföra kunskapsprovet med eleverna och efter lektionen skulle vi ha intervjun med läraren. Lärare B fick vi tid till redan dagen efter vårt besök. På elevernas första lektion för dagen skulle vi få genomföra kunskapsprovet och sedan skulle vi få komma tillbaks igen efter att elevernas skoldag var slut för att ha intervjun med läraren. Den enda information lärarna fick var att vi skulle göra en undersökning kring skriftlig huvudräkning. Läraren fick alltså inte ta del av kunskapsprovet som eleverna skulle lösa, på grund av att denne inte skulle kunna träna eleverna på just dessa uppgifter innan, för att vi ville se resultatet av dennes vanliga undervisning.

Tillvägagångssätt
I vår undersökning valde vi att använda oss av en kvalitativ metod, vilket var intervjun med lärarna, samt en kvantitativ metod, som var genomförandet av kunskapsprovet med eleverna. Vi gjorde därför både en kvalitativ och kvantitativ undersökning i vår studie, vilket också ledde till att intervjun analyserades kvalitativt medan kunskapsprovet analyserades kvantitativt. Men därefter när båda resultaten skulle jämföras, analyserades båda resultaten kvalitativt.

I skapandet av utseendet till vårt kunskapsprov samt utformning av vår intervjuguide har vi hämtat inspiration från Andersson och Dahls (2013) upplägg av sin intervjuguide och sina elevuppgifter som går att se i bilagorna i deras examensarbete.

Intervju

Enligt Kvale och Brinkmann (2014) handlar den kvalitativa forskningsintervjun om att man som intervjuare ska förstå och återspegla det den intervjuade har berättat. I en forskningsintervju vill man få ut så mycket kunskap och erhålla så många nyanserande beskrivningar som möjligt på de olika aspekter som den intervjuade upplever och ser saker på. Detta är därför en användbar metod för oss då vi vill få reda på vad läraren anser sig använda sig av en begreppslig förståelse i sin undervisning samt vilka beräkningsstrategier denne undervisar i.

Vi valde att använda oss av en semistrukturerad intervju, vilket enligt Justesen och Mik-Meyer (2011) innebär att man som forskare skapar en intervjuguide med ett tema och några grundläggande frågor som intervjuaren håller sig till. Därefter kan olika följdfrågor skapas utifrån de svar man får. Kvale och Brinkman (2014) beskriver att en intervjuguide är en översikt av de frågor som ska ställas och beroende på hur reserverad den intervjuade är anpassas frågorna efter situationen, med andra ord är det intervjuaren som avgör hur strikt guiden bör följas i det enskilda fallet.

Formuleringen av frågorna i vår intervjuguide (se *bilaga 2*) baserade vi på vårt de två första forskningsfrågorna i vår studie. Frågorna är öppna för att få ut så mycket som möjligt av den intervjuades egna tankar. Vi utvecklade våra intervjufrågor till att också beröra vilka skriftliga huvudräkningsstrategier som läraren har kunskap om och om detta i så fall överensstämmer med de strategier som läraren även undervisar i, vilket förstås inte var fallet med Lärare A. Anledningen till att vi ändå valde att ha med samma grundfrågor kring skriftlig huvudräkning, var att vi ville ha reda på om även Lärare A hade kunskap om denna del av matematiska beräkningsstrategier samt vad dennes åsikt var kring dessa, vilket på så vis också motiverar dennes val av att enbart arbeta med standardalgoritmen. I intervjun med lärarna var vi båda närvarande, för att den ena skulle fokusera på att ställa frågorna till den intervjuade medan den andre fokuserade på att ta anteckningar för stunden. På så vis kunde vi båda två komma på följdfrågor. I intervjun använde vi oss också av ljudupptagning. Att använda sig av ljudupptagning leder enligt Kvale och Brinkman (2009) just precis till att man kan lägga fokus på annat, som i vårt fall till exempel stödanteckningar. De säger också att en annan fördel är att intervjuaren alltid kan återvända för att ta reda på vad den intervjuade med exakta ord har uttryckt, vilket i sin tur ökar tillförlitligheten.

Kunskapsprovet

För att få reda på vilka beräkningsstrategier eleverna använder sig samt vilken nivå elevernas matematiska förmåga låg på (elevernas taluppfattning samt begreppsförståelse), valde vi att dela ut ett kunskapsprov till vardera klassen. I Klass A-SA var det 21 elever som svarade på kunskapsprovet och i Klass B-SH var det 29 elever som svarade.

I utformningen av vårt kunskapsprov tog vi i beaktande att enkäter, liksom kunskapsprov, som har fasta svarsalternativ genererar ett kvantitativt datamaterial där statistik används som ett redskap för att undersöka det utvalda området (Sorbring, 2013). Enkäter kan också innehålla frågor med öppna svar, men då är det enligt Trost (2012) viktigt att man som forskare är medveten om att dessa enkäter, oavsett utformning, kan anses jobbiga att svara på.

Detta är någonting som grundas i att många anser att det är jobbigt och tråkigt att skriva utförliga svar. Med hänsyn till detta valde vi att enbart ha elva uppgifter i vårt kunskapsprov, då alla uppgifter var utan svarsalternativ. Anledningen till att vi valde att inte ha svarsalternativ var för att vi inte ville styra eleverna till att tvingas välja mellan ett visst antal beräkningsstrategier utan för att vi ville ta reda på vilka strategier eleverna själva spontant valde. Detta för att eleverna kunde använda sig av någon strategi som vi inte valt att ha med till just den uppgiften och även för att det kan vara så att eleverna inte känner igen sig i det sätt som vi förklarade strategin på. Genom att ha öppna svar kunde vi få reda på om eleverna använde sig av någon strategi som inte passade in i vår kategorisering samt även se om eleverna beskrev sina beräkningsstrategier på liknande sätt. Samtidigt, efter analys av elevernas förklaringar, kunde vi också få reda på vilken strategi som användes mest i klassen. Enligt Sorbring (2013) är också öppna frågor att föredra när man ska undersöka ett område som är relativt okänt eftersom frågorna då är av ett mer utforskande slag samt inte begränsar svaren till specifika svarsalternativ.

Enkäter, liksom kunskapsprov, kan genomföras på olika sätt, några av dessa är muntligt, skriftligt och digitalt (Sorbring, 2013). I vårt fall valde vi att genomföra kunskapsprovet på papper med möjlighet till kort muntligt stöd ifrån oss vid behov i form av svar på frågor och förtydliganden. Enligt Sorbring (2013) är det en fördel att den som genomför studien närvarar vid undersökningen. Detta ska göra det enklare att försäkra sig om att eleverna förstår sina rättigheter samt att det kan minska bortfallet.

Självadministrerade enkäter är enkäter som deltagarna själva fyller i. Oftast innebär detta att deltagarna fyller i enkäten enbart utifrån den information som finns i följebrevet/missivbrevet och enkäten (Sorbring, 2013). Detta kan även tas i hänsyn när man använder sig av kunskapsprov. I vår undersökning fick eleverna förutom denna information även muntlig information av oss på plats. Sorbring (2013) menar även att eleverna inte ska prata med varandra under tiden de fyller i enkäten då de kan påverka varandras svar. I den muntliga informationen vi gav till klasserna på plats var vi tydliga med detta och under tiden eleverna fyllde i kunskapsprovet var både vi och läraren med i klassrummet för att kontrollera att tystnaden hölls. Det var enbart fyra elever från vardera Klass A och Klass B, vad vi märkte, som behövde någon extra påminnelse att inte prata med varandra under tiden.

De elva uppgifterna i kunskapsprovet (se *bilaga 3*) är utformade utifrån de sju skriftliga huvudräkningsstrategier vi redogjorde för under vår teoretiska utgångspunkt. Vardera strategin får minst en uppgift anpassad till att just den strategin ska vara mest lämplig att använda, för att få eleverna till att använda sig av olika strategier. Detta för att kunna se elevernas bredd på antalet beräkningsstrategier de har kunskap om samt kan hantera. Valet av talen i uppgifterna i kunskapsprovet har vi valt utifrån de tal som andra författare (Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008; McIntosh, 2008; Rockström, 2000) använder i sina exempel av de olika strategierna. Detta för att de ska vara anpassade till en specifik skriftlig huvudräkningsstrategi. Till vardera uppgiften ombads eleverna att först skriva det svar som de har kom fram till när de räknade i huvudet. Därefter fick eleverna, med siffror, symboler eller bokstäver, förklara hur de tänkte. När en elev blev klar med kunskapsprovet fick denne lämna in den till oss direkt. Vi ögnade då snabbt igenom svaren för att se om eleven hade förklarat sina tankar till varje uppgift. Om en elev inte gjort en förklaring, satte sig en av oss med denne direkt för att hjälpa eleven att få ned sina tankar på pappret. Detta gjordes eftersom det var nödvändigt att vi fick se elevens resonemang för att vi skulle kunna kategorisera in det i en av de benämnda skriftliga huvudräkningsstrategierna eller standardalgoritmen och på så vis

kunna svara på vår tredje forskningsfråga. Sammanlagt var det med endast sju elever i Klass A och fyra elever i Klass B som detta skedde.
För att sortera ut elevernas nivå av begreppslig förståelse varierade vi även svårighetsgraderna på uppgifterna. De sätt vi använde oss av för att öka svårighetsgraden var att använda oss av addition med tre tal istället för två, hundratal istället för tiotal, decimaltal istället heltal samt även att vi varierade svårighetsgraden beroende på om det skedde en tiotalsövergång i beräkningen eller inte.

När vi valde i vilken ordning uppgifterna i kunskapsprovet skulle komma tog vi hänsyn till att Foxman och Beihuizen (2002) säger att en lätt fråga i början skapar självförtroende hos eleven samt att en lätt fråga i slutet kan fungera som en sista avstämning av vilka av eleverna som varit fokuserade under hela kunskapsprovet. Vår första uppgift blev därför 52 + 36, vilket medför en beräkning av tvåsiffriga heltal utan tioövergångar. Vår näst sista uppgift fick bli kontrolluppgiften, vilket blev 422 + 135 + 241. Vilket också är heltal utan tioövergångar. Enligt Foxman och Beihuizen (2000) var addition med tresiffriga heltal den näst lättaste uppgiften. Enligt Sorbring (2013) är det även viktigt att tänka på att ordningen som frågorna ställs i påverkar vilka svar som ges. Våra medvetna val i kunskapsprovet var att först kom en uppgift för en specifik skriftlig huvudräkningsstrategi och senare, men inte direkt efter, kom ibland en uppgift med decimaltal anpassad till samma skriftliga huvudräkningsstrategi. Vissa strategier ges enbart uppgifter med heltal, för att de av oss ansågs enbart komplicerade att använda sig av vid decimaltal. På grund av likheten mellan strategierna *flytta över*, *hundra-/tiokamrater* och *kompensering* kommer inte uppgifterna med dessa olika strategier direkt efter varandra, för att inte leda in eleverna på att använda sig av samma strategi varje gång. Överlag har vi annars försökt att variera uppgifter med decimaltal och heltal.

Bearbetning av forskningsmaterial

Kvale och Brinkman (2009) säger att transkribera en intervju ger en större möjlighet att analysera alla resultat samtidigt som du har hela bilden framför dig om vad som har sagts och hur det har sagts. Därav transkriberade vi intervjuerna med lärarna för att kunna sätta lärarnas svar kring undervisning i skriftlig huvudräkning samt begreppsförståelse i relation till tolkningen av elevernas svar i kunskapsprovet. Vi valde att transkribera enbart de delar av intervjun som rörde vår undersökning, då det fanns delar i båda intervjuerna där vi flöt ut från ämnet. Efter att vi transkriberat intervjuerna analyserade vi dem först var för sig för att därefter jämföra våra analyser med varandra för att på så sätt få ett bredare perspektiv och på så vis minska subjektiviteten vilken är ofrånkomlig i analys av en intervju (Kvale & Brinkman, 2009).

Efter att kunskapsprovet genomförts satte vi oss ner tillsammans för att gå igenom materialet vi samlat in. Vi valde att sammanställa materialet i tre övergripande tabeller (se *bilaga 4*) för att lättare kunna få en överblick av empirin. I *tabell a* och *b* kan man se vilken beräkningsstrategi eleverna använt sig av till vilken uppgift samt om de svarat rätt eller fel. I *tabell c* redovisas elevernas fel utifrån vad felet berott på. De beräkningsstrategier vi kategoriserat elevernas strategier efter är standardalgoritmen samt de olika skriftliga huvudräkningsstrategier vi redogjorde för i vår teoretiska utgångspunkt. Liksom Foxman och Beihuizen (2002) hade vi även en kategori kallad "Okategoriserbar" för de av eleverna beskrivna beräkningar som vi inte lyckats sortera in under någon av de andra kategorierna. Efter att vi börjat gå igenom materialet märkte vi även att vi fick lägga till ytterligare tre kategorier, vilka var "Räkna på fingrarna", "Ingen utskriven förklaring av sin beräkning" och "Inte svarat". "Räkna på fingrarna" var en gemensam strategi som några av eleverna använde sig av där de med hjälp av sina fingrar räknade upp ifrån det största talet. "Ingen utskriven förklaring av sin beräkning" var då eleverna även efter frågan ifrån oss, eller där vi missat att fråga igen, fortfarande inte kunde förklara hur de tänkt. "Inte svarat" innebar att eleverna inte gjort någon uträkning alls. Vid analysen av svaren av kunskapsprovet har vi valt ett variabel-centrerat angrepsätt, som innebär att man tar utgångspunkt i frågorna i undersökningen och analyserar en grupp efter dessa (Nyström, 2008). I vår undersökning innebär det att vi analyserar klasserna utifrån de olika beräkningsstrategierna samt uppgifterna i vårt kunskapsprov. Detta för att vi i vårt syfte har fokus på undervisningens påverkan på eleverna i klassen och inte fokus på varje enskild individ.

Etiska ställningstaganden

I vår undersökning har vi tagit hänsyn till den information som Vetenskapsrådet (2002) presenterar. I denna information lyfts de fyra etiska krav som forskaren måste följa. Dessa innefattar informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet samt nyttjandekravet.

Informationskravet

Informationskravet innebär att man som forskare har en skyldighet att berätta syftet med undersökningen och vart den ska publiceras för de berörda. De deltagande ska också bli informerade om att deltagandet är frivilligt och att de under forskningen när som helst kan avsluta sin medverkan (Vetenskapsrådet, 2002). I vår forskning valde vi att berätta både skriftligt och muntligt för de deltagande personerna om forskningens syfte och utförandet. De intervjuade lärarna fick muntligt och skriftligt (se *bilaga 1*) ta del av syftet och utförandet med undersökningen. Eleverna fick samma information muntligt förklarat för sig vid tillfället när de skulle genomföra kunskapsprovet.

Samtyckeskravet

Samtyckeskravet betyder att forskaren bör inhämta samtycke hos de deltagande i undersökningen. Vårdnadshavares tillstånd krävs om personen är under 15 år men om en undersökning inte innefattar privata eller etiskt känsliga frågor kan samtycke inhämtas av en företrädare för deltagarna (Vetenskapsrådet, 2002). Lärarna som intervjuades gav sitt medgivande skriftligt när vi först besökte dessa. Medgivandet gällde både att själva intervjuas samt att vi skulle få genomföra kunskapsprovet i deras klasser. I den muntliga information som vi gav till eleverna fick de tydligt förklarat för sig att de inte var tvungna att medverka om de inte ville, men att det var något vi önskade. De fick också information om att de inte var tvungna att svara på alla uppgifterna och att det när som helst gick bra att avbryta sin medverkan. I och med att eleverna lämnat in kunskapsprovet så har de också gett sitt samtycke om att vi fått använda det ifyllda kunskapsprovet i vår forskning.

Konfidentialitetskravet

Konfidentialitetskravet innebär att de deltagande ska känna sig trygga i att inga uppgifter om dem kommer att kunna identifieras eller att inga uppgifter om dem kommer att lämnas ut. Det innebär också att forskarna har tystnadsplikt gällande fakta som kan vara etiskt känsligt (Vetenskapsrådet, 2002). Vi nämner inte i vår studie några namn på varken skola eller deltagande personer. Och den information vi fått via svaren på kunskapsprovet och ljudupptagningar i form av våra intervjuer kommer att förvaras på ett sådant sätt att ingen obehörig har tillgång till dem.

Nyttjandekravet

Nyttjandekravet betyder att den undersökning som sker endast får användas för forskning, samt att den fakta man får av de undersökningar man utför endast får användas till forskning. Man får som forskare inte lämna ut information i ovetenskapligt syfte (Vetenskapsrådet, 2002). Hänsyn till detta har tagits genom att vi inte lämnat ut några resultat till några utomstående utan det har endast använts till vår forskning.

Resultat och analys:

I denna del kommer först resultat samt analys av intervjuerna med lärarna att presenteras utifrån forskningsfrågorna "i vilken utsträckning uppfattar läraren att denne bygger undervisningen i matematik på en begreppslig förståelse?" och "vilka beräkningsstrategier har läraren gått igenom med eleverna?". Detta presenteras under rubriken "Genomförd läroplan" där lärarnas svar kommer att presenteras var för sig. Därefter kommer elevernas resultat samt analys att presenteras utifrån forskningsfrågan "vilka strategier i skriftlig huvudräkning använder sig eleverna av och hur stor del är användningen av standardalgoritmen bland eleverna?". Detta presenteras under rubriken "Uppnådd läroplan". Elevernas resultat kommer att presenteras samtidigt för att jämföra klassernas resultat med varandra. Sist i denna del kommer vi att analysera resultaten från lärarnas intervjuer med elevernas svar på kunskapsprovet utifrån vårt syfte "syftet med denna studie är att undersöka på vilket sätt elevernas eget användande av beräkningsstrategier vid lösning av numeriska uppgifter i addition påverkas av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning". Detta redovisas under rubriken "Påverkan av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning på elevernas eget användande av beräkningsstrategierna i addition".

Genomförd läroplan - lärarnas undervisning

Vi kommer att presentera vårt resultat nedan utifrån två fokus. Det ena utifrån vad läraren ansåg om elevernas kunskap och det andra om deras undervisning byggt på en begreppslig förståelse lärarna ansåg om de olika beräkningsstrategierna.

Lärarnas åsikter samt undervisning kring en begreppslig förståelse

Enligt Löwing (2008) är det viktigt att eleverna har en god taluppfattning för att de ska kunna utföra olika beräkningar. Tre delar inom taluppfattning är förståelse för lilla och stora additionstabellen, positionssystemet samt likhetstecknet. Lärarnas åsikter och undervisning kring dessa tre begrepp presenteras under denna rubrik för att ta reda på om lärarna baserar sin undervisning på en begreppslig förståelse eller inte. Alltså om lärarna har en konceptuell syn på sin undervisning eller om deras undervisning är mer "gör-så-här-orienterad" (Bentley, 2012).

Lärare A berättade att lärarna på mellanstadiet inte lägger ner någon större tid på att träna på lilla och stora additionstabellen, utan den kunskap eleverna har, har de fått från lågstadiet. Anledning till detta är enligt läraren att "*man lägger inte jätte stort fokus på [additionstabellen] för att tiden inte finns där*". Märker hon att det är någon som har mycket svårt för lilla och stora additionstabellen så låter hon de träna extra på detta genom spel på ipaden. För tillfället kan alla elever i hennes klass lilla additionstabellen. När det kommer till positionssystemet har de inte arbetat fullt så mycket med det, utan det som har diskuterats och tränats på är hur eleverna uttalar decimaltalen. Ett exempel är att eleverna säger ett heltal och åtta tiondelar istället för "ett komma åtta". Men så som det är nu har eleverna inte arbetat mer med det. Vid likhetstecknet och dess betydelse uttrycker läraren att det finns stora problem med förståelsen för hur eleverna ska använda sig av det, något som hon även kan se i sin egen klass. Oavsett hur man diskuterar dess betydelse i klassen menar hon också att det är viktigt att förstå det man talar om. Hon säger också att det är lätt att man som lärare säger att åtta adderat med tre blir elva istället för att uttrycka det som åtta adderat med tre är lika mycket som elva.

Lärare A berättar att hon är insatt i att undervisningen bör byggas på en begreppslig förståelse, vilket är något som Bentley och Bentley (2011) också lägger stor vikt vid. Däremot lyckas hon inte förklara hur hon arbetar med begreppen i klassen, inte ens efter mer ledande följdfrågor ifrån oss. Ett exempel är efter att vi hade frågat hur hon arbetade med positionssystemet, kom hon först in på att prata om decimaltal. Därefter försökste vi få tillbaks fokus på vår egentliga fråga genom följdfrågan ”*har du med heltal och sånt också? Benämner du det som heltal, ental, tiotal och hundratal eller hur berör du det*?”. Lärarens svar blev då ”*jo, men det blir ju så, för det är mycket i algortimer och sånna saker, att man börjar med entalen… entalen och så… i de olika räknesätten och så…*”. Detta gör det i sin tur svårt för oss att bedöma om hon verkligen arbetar med en begreppslig förståelse i sin undervisning eller om det enbart är vad hon anser att hon borde göra.

Det Lärare B berättar för oss är att alla elever i hennes klass för tillfället ser ut att ligga på ett godkänt betyg i matematik. Hon nämner att eleverna i hennes klass kan både lilla och stora additionstabellen. Lärare B liksom Lärare A säger att de elever som fortfarande har lite svårigheter med stora additionstabellen får träna upp sin färdighet på sin ipad men som det är nu är det ingen som inte kan stora additionstabellen. Enligt Bentley (2012) krävs det att eleverna har automatiserat additionstabellerna för att kunna följa med i en genomgång av en beräkningsstrategi. Vid samtal om likhetstecknet berättar Lärare B att elever förväntar sig att det ska komma eller “finnas” ett svar på andra sidan, men att det alltid inte är så enkelt. Ett sätt som läraren arbetar med likhetstecknet är i form av en liknelse av en balansvåg. Hon berättar också att hon upplever att elever förstår mer nu jämfört med tidigare elever, något hon tror beror på att likhetstecknets betydelse diskuterats i så många forum som till exempel “Matematiklyftet”.

När det kommer till positionssystemet berättar Lärare B att hon arbetar flitigt med klassen för att skapa en förståelse för hur man använder sig av det och hur det används inom matematiken. Till att börja med introducerar hon detta genom olika metoder:

> ”*vi undersöker hur man gjorde i Indien, vi gräver gropar och lägger stenar, och så byter vi stenarna mot olika värden […] Vi försöker förstå vad det är som händer när man multiplicerar med 10, 100 eller 1000. Varför kommer dem här nollorna bakom? Och då vi tittar på ett positionssystem och vi flyttar. Om det blir tusen gånger större då måste det flyttas så mycket. Vad händer om man inte flyttar det då, ja men då får man något helt annat. Vi jobbar mycket med att försöka förstå vad positionssystemet det handlar om och varför det funkar*”.

Lärare B berättar att i ett senare skede kommer hon att fortsätta att utveckla sina metoder för att på sikt nå en fullständig förståelse. Men som det ser ut i dagsläget arbetar man med decimaltal och hur de benämner dessa korrekt inom matematiken, det heter noll hela och fem tiondelar inte “noll komma fem”. Dessutom diskuterar man vilka problem det skulle bli om man inte har med nollan i positionssystemet. I klassen diskuterar de även om varför traditionella standardalgoritmer fungerar och när de inte fungerar, för att på så sätt belysa olika metoder.

Utifrån det ovanstående som beskriver vad Lärare B berättat kring de olika begreppen visar det tydligt att även hon, liksom Lärare A, är mycket insatt med att undervisningen bör byggas på en begreppslig förståelse. Lärare B förtydligar sin åsikt ytterligare när hon säger ”*det är inte metoden i sig som gör att [eleverna] lär sig eller inte utan jag tror om de har förståelse för varför [metoderna] fungerar*”. Sett till hennes förklaringar av hur hon arbetar med dessa begrepp samt den tid hon beskriver att hon lägger på detta, kan det även tolkas som att hon i sin undervisning utgår ifrån en begreppslig förståelse hos eleverna.

Lärarnas åsikter om de olika beräkningsstrategierna
Utifrån vad Lärare A berättat är hon medveten om att det finns flera beräkningsstrategier men hon arbetar enbart med standaralgoritmen och undervisar inte i skriftlig huvudräkning. En av anledningarna till att hon enbart lär ut standardalgoritmen är för att hon anser att eleverna ska få en metod att lita på och kunna känna sig trygga med då hon sett att eleverna vid skriftlig huvudräkning chansat på sina svar. Detta förklarar hon med att ”*[eleverna] har en metod att lita på. Tar de huvudräkning så blir det en chansning, och vill man ha rätt svar så…*”. Detta går hand i hand med den inställning Bentley och Bentley (2011) hade i genomförandet av kompetensutvecklingsprojektet som Lärare A deltog i. Lärare A säger också att hon istället för att undervisa i flera strategier värnar om att alla elever ska få godkänt i matematik och därför vill se till att de alla får en god kunskap i standardalgoritmen. Detta liknar Johanssons (2006) syn på att det är en fördel att eleverna lär sig standardalgoritmen som en mekanisk procedur då alla elever får ta del av samma kunskap. Däremot är ett flertal andra forskare (Mardjetko & Macpherson, 2007; Reys & Reys, 1995; McIntosh, 2008) av en annan åsikt då man förespråkar att standardalgoritmen införs först senare i undervisningen. Enligt Hickendorff et.al. (2010) missar även eleverna tillfälle att lära sig att dra matematiska slutsatser och förstå olika resonemang när det inte får möjlighet till att finna egna skriftliga huvudräkningsstrategier.

Det Lärare B berättat är att hon undervisar i både skriftlig huvudräkning och standardalgoritmen och har en öppen inställning för de olika beräkningsstrategierna i elevernas val av strategi: ”*jag tycker [eleverna] ska få välja vad de tycker känns bäst*”. Läraren har därför liknande synsätt som Mellin-Olsen (1989), vilket är att eleverna ska få använda sig av standardalgoritmen så länge som de har rätt förståelse av den. Vid skriftlig huvudräkning har läraren tillsammans med eleverna gått igenom varje talsort för sig, hundratal och tiotal, uppdelning m.fl. Enligt Burton (1999, refererad i Murphys, 2004), liksom vad Murphys egen studie visade, är det dock viktigt att eleverna har fått tillgodogöra sig de nödvändiga förkunskaperna innan en genomgång av en skriftlig huvudräkningsstrategi sker för att eleverna ska ha en möjlighet att kunna få en förståelse för hur strategin används. Enligt Varol och Farran (2007) är det också viktigt att elever även får chans till att skapa egna skriftliga huvudräkningsstrategier redan från början för att inte låsa sig vid enbart en specifik beräkningsmodell, vilket Lärare B inte säger någonting om i intervjun. Lärare B har en bred kunskap om vilka metoder man kan använda sig av vid skriftlig huvudräkning och arbetar flitigt med eleverna för att åstadkomma resultat. Hon säger flertalet gånger att det är viktigt att eleverna har kännedom om flera beräkningsstrategier för att kunna anpassa sin metod efter hur uppgiften ser ut för att på så sätt få ett så effektivt räknande som möjligt. Detta är även något som Löwing (2008) förespråkar.

Det som framgår i det andra stycket om vilka beräkningsstrategier lärarna använder sig av är enkelt att förstå och tolka utefter hur lärarna har svarat, Lärare A använder sig enbart av standardalgoritmen medan Lärare B undervisar i både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning. När det handlar om lärarnas undervisning gällande om de bygger den på en begreppslig förståelse pratar de båda lärarna om hur de arbetat med några av de begrepp som vi tog upp i intervjun och hur de tänkt introducera de andra begreppen vi tog upp. Trots att båda lärarna pratar mycket om hur det tänkt lägga upp sin undervisning med ett fokus på en begreppslig förståelse tolkar vi det som att Lärare B lyckats genomföra det på ett tydligare sätt i och med att hon kunde konkret förklara hur hon arbetade med de olika begreppen som vi tog upp i vår intervju. En likhet mellan klasserna är att ingen klass hade fått undervisning kring decimaltal när vi genomförde vår undersökning.

Uppnådd läroplan - elevernas resultat

I sammanställningen av elevernas resultat på kunskapsprovet har vi utgått från de tre tabeller i *bilaga 4* samt ytterligare två tabeller som presenteras i texten nedan. Klassernas olika resultat kommer att redovisas utifrån resultat sett till hela kunskapsprovet, till vardera strategin samt till vardera uppgiften. Vi kommer också att presentera skillnader och likheter mellan elevernas utskrivna förklaringar vad gäller de olika strategierna inom skriftlig huvudräkning som vi undersökt. Under denna del kommer även tidigare benämnd Klass A, den klass som enbart fått undervisning i standardalgoritmen, att kallas Klass A-SA och Klass B, den klass som fått undervisning i både skriftlig huvudräkning samt standardalgoritmen, att kallas Klass B-SH.

Övergripande resultat

Det totala antal svar i kunskapsprovet som vi kunde förvänta oss var från Klass A-SA 231 svar och från Klass B-SH 319 svar. Men på grund av internt bortfall, vilket innebär de frågor som en elev valt att inte svara på (Sundell, 2008), blev det totala antal svar från Klass SA 209 svar, med ett internt bortfall på 9,5 %, och från Klass SH 304 svar, med ett internt bortfall på 4,7 % (se *bilaga 4, tabell a* och *b*). En möjlig tolkning av att det interna bortfallet är nästan dubbelt så stort i Klass A-SA, är att eleverna i Klass B-SH har svarat på fler av uppgifterna för att de har en högre matematisk förmåga och därav kunnat svara på fler antal uppgifter. En annan möjlig tolkning är att eleverna i Klass A-SA inte orkade med att svara på lika många uppgifter då det kan jämföras med att svara på en enkät med öppna frågor kan anses vara ansträngande (Trost, 2012).

Orsaker till de fel som eleverna gjorde

I denna del presenteras och analyseras resultatet ifrån *tabell c* (se *bilaga 4*) om inget annat anges. När vi sammanställt andelen fel svar har vi inte räknat med de svar där elever räknat rätt i sina beräkningar men skrivit fel svar.

I Klass A-SA fick eleverna fram fel svar tre gånger så ofta som i Klass B-SH. När vi försökte kategorisera orsaken bakom de fel som gjorts var det några fel i båda klasserna som vi inte lyckades kategorisera för att vi inte kunde förstå varför felet gjorts eller för att eleverna inte hade skrivit ut hur de kommit fram till sitt svar. Av de fel som eleverna gjorde skedde de flesta fel i båda klasserna på grund av brister i elevernas taluppfattning (t.ex. 52 + 36 : 2 + 6 = 8 : **50 + 30 = 70** : 8 + 70 = 78 (brister i additionstabellen), 47 + 26 : 6 + 7 = 13 : 10 + 20 = 60 : **3 + 60** = 63 (brister i positionssystemet)). Däremot skedde ungefär 10 % fler fel i Klass A-SA än i Klass B-SH på grund av brister i taluppfattningen. Elevernas brister i taluppfattning följer resultatet i rapporten från TIMSS 2011 (Skolverket, 2012), som visar att ett av de områden i matematik som elever i årskurs fyra har svårast för är Taluppfattning och aritmetik. Av dem delar inom taluppfattning som eleverna i Klass A-SA gjorde flest fel inom var positionssystemet medan eleverna i Klass B-SH gjorde flest fel på grund av brister i additionstabellen. Att eleverna i Klass B-SH får ut mindre andel fel svar ifrån sina beräkningar kan tolkas som att de har en bättre taluppfattning, då enligt Hickendorff et. al. (2010) gör elever fler fel om de har brister i sin taluppfattning. Detta visar sig även i vår studie då eleverna i Klass A-SA har en större andel fel på grund av brister i sin taluppfattning än Klass B-SH.

Av de fel som gjordes vid användning av en skriftlig huvudräkningsstrategi skedde hälften av felen i mellanleden för eleverna för eleverna i Klass B-SH och i Klass A-SA var det ca 10 % fler som gjorde fel i mellanleden. Av de fel som eleverna gjorde i mellanleden skedde alla enbart på grund av fel i hanteringen av mellanleden, medan det för eleverna i Klass A-SA i 93,3 % av fallen skedde fel i mellanleden som även hörde samman med elevernas brister i sin taluppfattning. Enligt Bentley och Bentley (2011) är det i mellanleden i skriftlig huvudräkning som felen görs, vilket inte stämmer till fullo med våra resultat. I vår undersökning ser vi även att andra orsaker har betydelse samtidigt som att det inte är förvånande att felen görs i mellanleden då det faktiskt är där beräkningarna görs. Bentley och Bentley (2011) säger även att elever gör fel i skriftlig huvudräkning på grund av att de blandar ihop mellanleden ifrån olika strategier. Detta kunde inte vi se bland eleverna i vår undersökning.

Stavy och Tirosh (2000, refererad i Bentley & Bentley, 2011) tar upp att elever kan skapa sig felaktiga strategier som inte går att generalisera i andra situationer. Även i vår undersökning kunde vi finna felaktiga regler som några av eleverna skapat sig. I Klass A-SA var det några av eleverna som på grund av brister i sin förståelse av positionssystemet hade skapat sig egna regler. En av dessa regler benämner vi "Adderat summan av tiondel och ental som om de var samma talsort" vilket kan förklaras med att eleverna adderade ental för sig och tiondel för sig, men därefter även adderade summorna av entalen med summorna av tiondelarna (t.ex. 1,8 + 5,1 : 1 + 5 = 6 : 8 + 1 = 9 : 6 + 9 = 15). Den andra regeln vi lyckades urskilja bland några av eleverna benämner vi "Räknat ihop summan av alla talsorter som om de var samma talsort" som innebär att eleverna adderade vardera talsort för sig, men därefter adderade summorna av vardera talsort (t.ex. 43 + 11 + 27: 4 + 1 + 2 = 7 : 3 + 1 + 7 = 11 : 7 + 11 = 18). Det behövde inte vara samma elev som skapat sig båda dessa felaktiga regler. I Klass B-SH skedde dessutom 15,4 % av alla fel som gjordes på grund av ren okunskap kring decimaltal. I Klass B_SH var det istället några elever som hade skapat sig en felaktig regel på grund av ren okunskap kring decimaltal. Denna regel benämner vi "Adderat vartdera talets ental och tiondel som om de var samma talsort". Regeln kan förklaras på så vis att eleverna adderade entalet med tiondelen i samma tal och därefter adderade summorna de fått ifrån att ha gjort detsamma med alla tal i uppgiften (t.ex. 1,8 + 5,1 : 1 + 8 = 9 : 5 + 1 = 6 : 9 + 6 = 14).

Elevernas beräkningsstrategier

I denna del presenteras och analyseras resultatet ifrån *tabell 1* och *2* (se nedan) om inget annat anges. Tolkningsförklaring av de förkortningar som används i tabellerna finns i *bilaga 4*.

Tabell 1. Jämförelse mellan klasserna sett till antal elever som använt sig av de olika beräkningsstrategierna

			Klass A		Klass B	
Beräknings-strategi			Antal (st)	Andel (%)	Antal (st)	Andel (%)
St.a.			127	60,8	129	42,4
Skr.H.r.	Totalt		68	32,5	165	54,3
	Complete	Totalt	8	11,8	17	10,3
		Räk.f.s.	2	25,0	4	23,5
		Komp.	X	0	X	0
		F.Ö.	X	0	1	5,9
		H/T	6	75,0	4	23,5
		O.O.	X	0	8	47,1
	Split	Totalt	59	86,8	138	87,3

		Talsort	57	96,6	132	95,7
		Delning	2	3,4	6	4,3
	Mix		1	1,5	4	2,4
Räk.fing.			4	1,9	X	0
?			X	0	2	0,7
Ej skrivit			10	4,8	8	2,6

* X = ingen elev har använt sig av denna strategi.

Tabell 2. Jämförelse mellan klasserna sett till andel (%) rätt svar för vardera namngivna beräkningsstrategin

Beräkningsstrategi	Klass A	Klass B
St.a.	82,7	89,9
Skr.H.r.	64,7	96,4
Complete	100	100
Split	59,3	95,8
Mix	100	100
Räk.f.s.	100	100
Komp.	X	X
F.Ö.	X	100
H/T	100	100
O.O.	X	100
Talsort	59,6	96,4
Delning	50,0	85,7
Räk.fing.	50,0	X

* X = ingen elev har använt sig av denna strategi.

Ifrån båda klasserna var det ungefär lika stor del av svaren som vi inte kunde kategorisera in under någon beräkningsstrategi (se *bilaga 4*, *tabell a* och *b*). Anledningen till att vi inte kunde kategorisera dessa svar var antingen för att eleverna inte skrivit ut hur de tänkt eller för att deras förklaring inte stämde in på någon av våra kategorier.

I Klass A-SA använde sig eleverna mer av standardalgoritmen än någon av de skriftliga huvudräkningsstrategierna (vilka strategier det innebär se *bilaga 4*, *tabell a* och *b*), medan det i Klass B-SH var tvärtom. Att eleverna i Klass B-SH, som fått undervisning i både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning, använder sig av skriftlig huvudräkning något mer än standardalgoritmen stämmer någorlunda med det resultat Hedrén (1999) fick i sin undersökning, då det visade sig att de flesta av eleverna behöll sina strategier i skriftlig huvudräkning efter att de fått undervisning i standardalgoritmen. Lösningsfrekvensen i användandet av de olika strategierna följer även samma mönster, då Klass A-SA har högre lösningsfrekvens i användandet av standardalgoritmen jämfört med skriftlig huvudräkning, medan det återigen var tvärtom för Klass B-SH. Dock är fortfarande lösningsfrekvensen för användning av standardalgoritmen i Klass B-SH lite högre än lösningsfrekvensen för Klass A-SA.

Eleverna i båda klasserna använde sig av någon skriftlig huvudräkningsstrategi i kategorin *complete number approach* (vilka strategier det innebär se *bilaga 4*, *tabell a* och *b*) i ungefär lika stor utsträckning. Användningen av en strategi i denna kategori gav i båda klasserna också alltid rätt svar. Användningen av strategierna i *split number approach* (vilka strategier det innebär se *bilaga 4, tabell a* och *b*) använde sig eleverna i båda klasserna också av i ungefär lika stor del. Däremot är det i denna kategori stor skillnad i lösningsfrekvensen mellan klasserna. Klass B-SH har ungefär 35 % högre lösningsfrekvens än Klass A-SA. Om man jämför de båda kategorierna inom skriftlig huvudräkning använder sig båda klasserna av en strategi tillhörande *split number approach* i ungefär 75 % mer än en strategi tillhörande *complete number approach*. I Foxman och Beihuizens (2002) analyserade studie kom de fram till att de strategier som tillhörde *complete number approach* var de som hade högst lösningsfrekvens, vilket även visade sig vara i vår undersökning. Även denna gång kan att Klass B-SH har en högre lösningsfrekvens än Klass A-SA tolkas som att eleverna i Klass B-SH har en bättre taluppfattning. Däremot hade eleverna i Klass A-SA alla rätt i användandet av en strategi i kategorin *complete number approach*, kan vara som så att det i båda klasser enbart är de elever som har en god begreppslig förståelse som använder sig av dessa strategier. Då Foxman & Beihuizens (2002) analys tydde på att det var strategier inom denna kategori som krävde mest begreppslig förståelse för att användas.

Av de fem strategier som tillhör kategorin *complete number approach* använde sig eleverna i Klass A-SA av två av dem (*räkna från största talet, hundra-/tiokamrater*) medan eleverna i Klass B-SH använde sig av fyra (*räkna från största talet, flytta över, hundra-/tiokamrater och ombytt ordning*). Däremot använde sig eleverna i Klass A-SA mer av *att räkna från största talet* och *hundra-/tiokamrater* än vad eleverna i Klass B-SH använde sig av dessa två strategier. I båda klasser fanns det även de elever som valde att blanda olika skriftliga huvudräkningsstrategier i samma lösningsresonemang. I Klass A-SA var det i 1,5 % av fallen som någon elev hade använt sig av att blanda strategierna och i Klass B-SH var det 2,4 %. I båda klasserna gav det alltid rätt svar. Att Klass B-SH, sett till klassen i sin helhet, använde sig av fler beräkningsstrategier kan tolkas som att Klass B-SH har en bättre begreppslig förståelse än Klass A-SA, då en begreppslig förståelse enligt McIntosh (1995) gör det möjligt att välja bland och använda sig av fler strategier. Däremot är det nästan dubbelt så stor andel i Klass A-SA än i Klass B-SH som inte har skrivit ut hur de har tänkt när de har räknat ut uppgiften. Detta måste också tas hänsyn till, då det enligt Van Someren, Barnard och Sandberg (1994) kan vara svårt för elever som anses duktiga i matematik att förklara hur de har tänkt om det är så att de snabbt ser vad svaret ska bli utan att veta hur de har kommit fram till det. Därför kan det vara så att de elever som inte förklarat hur de kommit fram till svaret på uppgiften, och som vi missar i vårt statiska material, är elever med en god begreppslig förståelse.

Av strategierna som hör till kategorin *split number approach* använde sig eleverna i båda klasser till största del av strategin *varje talsort för sig*. Strategin *varje talsort för sig* är också den enda strategin av de olika strategierna inom skriftlig huvudräkning som används av någon av eleverna i varje klass till varje uppgift (se *bilaga 4, tabell a* och *b*). Detta stämmer väl överens med att Rockström (2000) säger att denna strategi kan användas till alla uppgifter inom addition.

Elevernas hantering av de olika uppgifterna

I denna del presenteras och analyseras resultatet ifrån *tabell a* och *b* (se *bilaga 4*) om inget annat anges. Antalen svar som anges i tabellerna har vi också räknat om till andelar i de fall som ansetts nödvändiga, vilka redovisas direkt i texten.

Eleverna följdes i princip åt i de uppgifter där det finns ett internt bortfall. Likheten med dessa uppgifter var att de antingen bestod av hundratal eller decimaltal, där det är uppgifterna med decimaltal som har de högsta delarna av internt bortfall i båda klasserna. Detta visar på att elevernas matematiska kunskaper i addition brister i uppgifter med större tal samt decimaltal.

De uppgifter med en utstickande större andel fler fel svar än övriga uppgifter var i Klass A-SA uppgift fyra och fem. Dessa båda uppgifter var de enda uppgifter där eleverna i Klass A_SA hade en högre andel som svarat fel än de som svarat rätt. I Klass B-SH var det enbart uppgift fyra som hade en utstickande större andel fler fel svar, då det var den enda uppgiften som mer än 12 % av eleverna svarat fel på. Uppgift fyra bestod av addition av tre hundratal med de högsta tiotalen och entalen i. Till denna uppgift var det tänkt att eleverna skulle använda sig av strategin *kompensering*, för att göra beräkningen avsevärt lättare. Ingen elev i någon av klasserna använde sig av denna strategi. Uppgift fem bestod av två decimaltal med tiotalsövergång. Återigen kan analysen visa på att eleverna i Klass B-SH har en bättre taluppfattning eftersom andelen fel svar är lägre i denna klass.

Det fanns inte någon uppgift där alla elever har svarat rätt i någon av klasserna, men de uppgifterna med andelen flest rätt svar i Klass A-SA var uppgift ett och nio. I Klass B-SH var det uppgift ett, två, sex och nio. Alla dessa uppgifter bestod av addition med minst ett tiotal, några med tiotalsövergång andra utan. Det enda som skiljde var att i uppgift sex var det tre tiotal som skulle adderas istället för enbart två och i uppgift två var ett av de två talen ett ental. Vilket stämmer överens med vad vårt antagande när vi gjorde upplägget av uppgifternas ordning i kunskapsprovet. Något vi inte räknade med var att uppgift sju, som liknande tidigare nämnda uppgifters karaktär genom att bestå av addition med två tiotal med tioövergång, inte fick samma höga lösningsfrekvens i någon av klasserna. Vi har inte lyckats hitta några hållbara hypoteser som kan förklara detta. Något som inte följde ett tydligt mönster mellan klasserna var skillnaden i elevernas svar mellan uppgift tre, som bestod av addition av två decimaltal utan tioövergång, och uppgift fem, som bestod av addition av två decimaltal med tioövergång. Av eleverna i Klass A-SA svarade 64,7 % rätt på uppgift tre medan det enbart var 43,7 % som svarade rätt på uppgift fem. Det var inte lika stor skillnad för eleverna i Klass B-SH (96,2 % i uppgift tre, 88,5 % i uppgift 5). Elevernas val i Klass B-SH gick även från att nästan alla valt *varje talsort för sig* i uppgift tre till att i uppgift fem även delas upp i val av strategierna *ombytt ordning* och standardalgoritmen. Att val av beräkningsstrategi sprider ut sig i elevernas andra möte med decimaltal kan vara att de då har hunnit skapa sig en bättre förståelse för decimaltal. En annan anledning kan vara att vi anpassat de två uppgifterna efter två olika beräkningsstrategier. Dock var ingen av uppgifterna specifikt anpassad till vare sig *varje talsort för sig* eller *ombytt ordning*.

I uppgift två, tre, fem och åtta använde båda klasserna sig mer av skriftlig huvudräkning än av standardalgoritmen i sina lösningsresonemang. I Klass B-SH var det i uppgift tre ingen av eleverna som hade använt sig av standardalgoritmen. Uppgift två innehåller addition av ett tiotal och ett ental, medan de andra uppgifterna alla innehåller addition av decimaltal. I uppgift fyra, sex, nio, tio och elva använde båda klasserna sig mer av standardalgoritmen än av skriftlig huvudräkning. I Klass A-SA var det alltid över 60 % av eleverna som använda sig av standardalgoritmen medan eleverna i Klass B-SH enbart använde sig av standardalgoritmen i över 60 % i uppgift fyra. Uppgift sex bestod av tre tiotal, uppgift nio av två tiotal och resterande uppgifter bestod av tre hundratal. Att alla uppgifter som innehöll addition med hundratal hörde till de uppgifter som standardalgoritmen används mest i kan ha att göra med att många av eleverna kända att det skulle bli en för komplicerad procedur med skriftlig huvudräkning. Standardalgoritmen är då enligt Marklund (1993) och Rockström (2000) till för att underlätta i dessa situationer. Uppgift nio hade dessutom uppgifter med addition av tre tal innan och efter sig i kunskapsprovet, vilket vi tror kan ha påverkat att det är fler elever som fortsatte med standardalgoritmen här och på så vis att det blev färre som valde skriftlig huvudräkning än i de andra uppgifterna med addition av två tiotal. I uppgift ett och sju använde sig eleverna i Klass A-SA övervägande mer av standardalgoritmen än skriftlig huvudräkning medan eleverna i Klass B-SH använde sig av båda metoderna ungefär lika mycket, med en övervikt åt skriftlig huvudräkning.

Elevernas förklaringar av två olika strategier i skriftlig huvudräkning

När vi studerade *tabell a* och *b* (se *bilaga 4*) fann vi det möjligt att för strategierna *varje talsort för sig* och *uppdelning* (dock enbart för Klass A-SH), jämföra likheten i olika elevers utskrivna förklaring av samma strategi till samma uppgift. De andra skriftliga huvudräkningsstrategierna hade för få elever som använt sig av samma strategi till samma uppgift för att kunna ge ett användbart resultat. Den uppgift vi valde att jämföra elevernas förklaring till var den uppgift som det fanns flest elever som använt sig av just den strategi vi ville jämföra. Detta innebär att i Klass A-SA jämförde vi elevernas förklaring i uppgift tre för *varje talsort för sig*. I denna uppgift var det tio elever som använt sig av denna strategi och i sin tur hälften av dessa hade skrivit ut sin förklaring på samma sätt. I Klass B-SH jämförde vi elevernas förklaring i uppgift ett för *varje talsort för sig* och i uppgift två för *uppdelning*. I uppgift ett var det sexton elever som använde sig av *varje talsort för sig*, varav 87,5 % beskrivit sitt resonemang på samma sätt. I uppgift två var det sju elever som använt sig av *uppdelning* och 42,9 % av dessa hade beskrivit sitt resonemang likadant. Eleverna i Klass B-SH visade i sin utskrivna förklaring av strategin *varje talsort för sig* en betydligt större likhet med varandra än eleverna i Klass A-SA. Däremot var likheten bland eleverna i Klass B-SH lägre i användandet av strategin *uppdelning*, sett till både den egna klassen och Klass A-SA vid användandet av strategin *varje talsort för sig*.

Sammanfattningsvis har eleverna i Klass B-SH ett lägre internt bortfall och en större andel rätt svar än Klass A-SA. Eleverna i Klass B-SH använder sig också av fler olika beräkningsstrategier samt har fler elever som blandar olika strategier i samma beräkning av en uppgift. Detta visar på att eleverna i Klass B-SH har en bättre taluppfattning och begreppslig förståelse än eleverna i Klass A-SA. Däremot görs de flesta fel av eleverna i båda klasserna på grund av brister i taluppfattningen. Vår undersökning visade också att Klass A-SA använder sig av standardalgoritmen mer än skriftlig huvudräkning medan det i Klass B-SH är tvärtom. Även lösningsfrekvensen i Klass A-SA är högre i användandet i standardalgoritmen än i skriftlig huvudräkning, men också då tvärtom i Klass B-SH. Lösningsfrekvensen är högst i användandet av strategierna inom *complete number apporach* för båda klasserna, men båda klasserna använder strategin *varje talsort för sig* tillhörande kategorin *split number approach*. I användandet av strategin *varje talsort för sig* har eleverna i Klass B-SH en betydligt högre lösningsfrekvens än eleverna i Klass A-SA. Uppgifterna som innehöll decimaltal var de uppgifter med högst internt bortfall i båda klasserna och även de uppgifter som det var flest elever som använde sig av skriftlig huvudräkning. En av dessa uppgifter var även en uppgift som eleverna i Klass A-SA hade flest fel på. De uppgifter som eleverna i båda klasser använde sig mest av standardalgoritmen var i de uppgifter som bestod av addition av tre hundratal. Av dessa uppgifter var en uppgift som elever i båda klasser hade en hög andel fel svar på. De uppgifter som hade högst andel rätt svar i båda klasserna var de uppgifter som innehöll addition med tiotal. Eleverna i Klass B-SH visar på en högre likhet med varandra i sina utskrivningar av strategin varje talsort för sig än vad eleverna i A-Klass SA gör.

Påverkan av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning på elevernas eget användande av beräkningsstrategierna i addition

Under denna rubrik kommer vi att presentera analysen av jämförelsen mellan lärarnas resultat och elevernas resultat, för att få reda på vad vår undersökning säger om undervisningens påverkan på eleverna i skriftlig huvudräkning inom addition.

Enligt Löwing och Kilborn (2003) leder en introduktion av standardalgoritmen som en mekanisk procedur till att eleverna tar efter en metod utan att få en förståelse för den. Detta kan vi se i vår undersökning då eleverna i Klass A, som enbart fått undervisning i standardalgoritmen, gick till att använda sig mer av skriftlig huvudräkning när de mötte uppgifterna med decimaltal från att främst ha använt sig av standardalgoritmen i de resterande uppgifterna i kunskapsprovet. Eftersom att decimaltal var något nytt för eleverna kan man tolka det som att eleverna inte hade någon förståelse bakom standardalgoritmen och därför var tvungna att använda sig av sin begreppsliga förståelse som då ledde till användning av olika skriftliga huvudräkningsstrategier.

Rockström (2000) säger att om elever enbart får lära sig standaralgoritmer som en mekanisk metod får de ingen god taluppfattning. Om elever saknar en god taluppfattning kan det enligt Hickendorff et.al. (2010) i sin tur leda till att de gör fler fel i sina uträkningar och även har en mindre förmåga att växla mellan olika beräkningsstrategier. Varol och Farran (2007) säger att om elever enbart fått lära sig en specifik beräkningsmodell och fått automatiserat denna, har de svårare för att skapa egna beräkningsstrategier vilket leder till en försämrad korrekthet vid lösning av olika uppgifter. Detta visade sig också i vår undersökning, då eleverna i Klass B, som fått undervisning i flera olika beräkningsstrategier, använde sig av fler olika beräkningsstrategier samt hade fler rätt svar än eleverna i Klass A. En annan förklaring kan vara att Klass A har sämre taluppfattning än Klass B då en brist på god taluppfattning enligt Varol och Farran (2007) leder till en sämre korrekthet vid beräkningar av uppgifter.

Enligt Bentley och Bentley (2011) samt Löwing (2008) krävs det att elever har en begreppslig förståelse för att kunna använda sig av skriftlig huvudräkning. I vår undersökning hade eleverna från båda klasserna alla rätt vid användandet av en skriftlig huvudräkningsstrategi inom kategorin *complete number approach*. Däremot vid användandet av strategierna inom kategorin *split number approach* hade Klass B, som vi utifrån intervjun med Lärare B tolkat hade fått en undervisning som baserades på en begreppslig förståelse, en avsevärt högre lösningsfrekvens.

Sammanfattningsvis såg vi att det både finns kvar de lärare som undervisar enbart i standardalgoritmen men att det också finns de lärare som gått vidare och använder sig både av standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning i sin undervisning. Vår undersökning visade även att elevernas matematiska förmåga gynnades av en undervisning som innehåller flertalet strategier. Ytterligare något vår undersökning visat var att det är av stor vikt att undervisningen byggs på en begreppslig förståelse och en god taluppfattning hos eleverna.

Diskussion

Denna rubrik kommer att inledas med en diskussion kring vårt resultat. Därefter kommer vi att i en diskussion kring metoden lyfta hur vi tänkt och vad vi kunde gjort annorlunda. Sist kommer vi att avsluta med att ge några förslag på fortsatt forskning som skulle kunna utveckla vår studie.

Resultatdiskussion

Vårt syfte med studien var att undersöka påverkan av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning på elevernas eget användande av beräkningsstrategier när de själva ska lösa numeriska uppgifter i addition. I vår undersökning såg vi att de elever som hade fått undervisning i skriftlig huvudräkning använde sig av fler beräkningsstrategier samt hade en högre lösningsfrekvens, vilket innebär att det finns en positiv påverkan av lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning på elevernas matematiska förmåga inom addition. Vårt resultat visade också att det var en positiv påverkan på elevernas lösningsfrekvens av att läraren baserat sin undervisning på en begreppslig förståelse. Resultatet tydde även på att det var av en större betydelse om undervisningen baserats på en begreppslig förståelse än vilken beräkningsstrategi läraren lärt ut, sett till elevernas utvecklande av en matematisk förståelse.

I vår studie framkom det sig att det finns ett positivt samband mellan lärarens undervisning i skriftlig huvudräkning och elevernas korrekthet vid beräkningar av olika uppgifter. Även Varol och Farran (2007) säger att om elever skapar sina egna beräkningsstrategier får de en större korrethet i sina beräkningar. Tvärtemot visar Bentley och Bentleys (2011) analys att en undervisning i skriftlig huvudräkning gör att eleverna blandar ihop mellanleden för de olika strategierna och på så vis oftare får fel svar på sina beräkningar. Även om tidigare litteratur är oeniga blir vår slutsats, sett till vad vårt resultat visade, att elever ska få ta del av skriftliga huvudräkningsstrategier då det visar på positiva effekter gällande den skriftliga huvudräkningen. Något som resulterar i att vår tolkning blir att lärare bör undervisa i skriftlig huvudräkning.

Vår studie visade att det även fanns en positiv påverkan på elevernas matematiska förmåga om läraren byggt sin undervisning på en begreppslig förståelse. Enligt både Bentley och Bentley (2011) samt Löwing (2008) behöver elever en begreppslig förståelse för att klara av att använda sig av skriftlig huvudräkning. I vår studie framkom det att det var eleverna i Klass B som hade fått en undervisning baserad på en begreppslig förståelse, och att det även var denna klass som använde sig av fler beräkningsstrategier samt hade fler rätt. Vår slutsats är därför att grunden till att skapa en god matematisk förmåga hos eleverna är att bygga undervisningen på en begreppslig förståelse snarare än vilken beräkningsstrategi de fått undervisning i. Det handlar alltså inte om att utesluta någon metod utan det handlar om att ge eleverna en så bred repertoar som möjlig, där eleverna får kunskap om flera metoder som det sedan kan välja bland när det löser olika matematiska uppgifter. De resultat som framkommit under studien indikerar att debatten gällande användandet av antingen standardalgoritmen eller skriftlig huvudräkning bör upphöra, då betydelsen verkar ligga i om eleverna har förstått de matematiska begreppen och inte på vilken strategi de har lyckats lära sig mekaniskt. Vårt resultat indikerar att lärare ska undervisa i både standardalgoritmen och skriftlig huvudräkning, men att de i alla lägen har byggt sin undervisning på en begreppslig förståelse.

Ytterligare reflektioner vi haft kring några mindre delar av vårt resultat är bland annat kring det Hedrén (2006) säger om att man som lärare tvingar på elever ett visst antal valda skriftliga huvudräkningsstrategier utan att bygga på en begreppslig förståelse, får man ett lika dåligt resultat som att enbart använda standardalgoritmen. Detta kan vara en möjlig anledning till att Lärare A tidigare inte lyckats lära ut skriftliga huvudräkningsstrategier på ett för eleverna användbart sätt och därför nu enbart undervisar i standardalgoritmen.

Ytterligare reflektioner är kring två delar av elevernas resultat av kunskapsprovet som inte blev som vi hade förväntat oss. Det ena var att de flesta av eleverna från båda klasserna lyckades lösa uppgifterna med decimaltal utan att de fått tidigare undervisning kring detta, samt att de flesta av eleverna i båda klasserna här valde att använda sig av skriftlig huvudräkning, oavsett om de i alla andra uppgifter använt sig av standardalgoritmen eller inte. Den andra delen som fick ett resultat som vi inte förväntade oss rör uppgift tio och elva, som båda bestod av addition med tre hundratal, med enda skillnaden att i uppgift tio skedde det ingen tioövergång. Här hade båda klasserna en elev mindre som svarat fel på uppgift elva jämfört med uppgift tio, även fast uppgift elva låg på en högre svårighetsgrad än uppgift tio. Resultat vi förväntat oss var alltså det motsatta.

En fundering vi har fått av vår forskningsöversikt men som vi missade att ta upp när vi formulerade intervjuerna samt kunskapsprovet, var när och hur man introducerar olika delar inom matematiken. Något som vi fastnat för och funderat extra kring är hur lärare idag arbetar med övergeneraliseringar. Bentley och Bentley (2011) säger att lärare som använder övergeneraliseringar i syfte att underlätta för eleverna istället försvårar det för eleverna eftersom det eleverna lärt sig i och med övergeneralisering inte fungerar på alla uppgifter. Vår fundering blir då varför elever ska lära sig övergeneraliseringar överhuvudtaget. Vi ser det inte som något nödvändigt om eleverna i slutändan inte kan använda det på fler uppgifter. Det blir för oss en onödig process som läraren dels ska förklara för eleverna samt att eleverna ska få tid på sig att lära sig detta trots att tiden kunde lagts på andra väsentliga delar som de visar tydliga tecken på att ha problem med.

Vi har också haft en del reflektioner kring helheten av vår studie, där den ena är gällande att vi utgått från TIMSS 2011 (Skolverket, 2012) när vi jämfört våra elevers resultat med eleverna i årskurs fyra i TIMSS rapporten från 2011. Men vad kommer rapporten från TIMSS 2015 att visa som kommer vara en mer aktuell rapport? Kommer resultaten att se annorlunda ut och i så fall på vilket sätt? Sedan TIMSS 2011 publicerades har det dessutom införts ett nytt betygssystem och en ny läroplan, och frågan blir då om detta har påverkat undervisningen i skolorna och på så vis elevernas matematiska förmåga.

En annan reflektion vi haft sedan dag ett är att många referenser och rapporter är gamla. Något som vi nu känner skulle behöva utvecklas då det finns ett behov av en fortsatt forskning inom matematiken. Framförallt då elevers resultat varit oförändrade enligt TIMSS 2011 (Skolverket, 2011).

Metoddiskussion

I vår studie valde vi att använda oss av en kvalitativ samt en kvantitativ datainsamlingsmetod, däremot i jämförelse mellan resultaten valde via att göra en kvalitativ analys då det lämpade sig till vårt syfte. Vid genomförandet av intervjun som är den kvalitativa metoden finns det en del saker vi hade kunnat tänka på. En sak vi hade kunnat tänka på mycket mer är hur vi har använt oss av ledande frågor när vi ställde följdfrågor till den intervjuade. Men i och med att vi använde oss av en intervjuguide var följdfrågorna mestadels till för att få en bekräftelse av det den intervjuade sagt. Vi anser ändå inte att det var alltför ledande frågor då läraren från den kommunala skolan talade väldigt gott om standardalgoritmer medan läraren på friskolan talade gott om skriftlig huvudräkning och standardalgoritmer. Om frågorna hade varit ledande borde vi inte fått så skilda svar från två olika lärarna. I och med att vi inte enbart tar stöd i våra anteckningar utan också har använt oss av de transkriberade intervjuerna så minskar vi risken för snedvridning av den intervjuades svar. Dock är vi alltid medvetna om att det inte går att komma undan subjektiviteten vid tolkning av en intervju (Kvale & Brinkman, 2009).

För att tydligare ha fått reda på om lärarna byggde sin undervisning på en begreppslig förståelse hade vi kunnat genomföra observationer under lärarnas matematiklektioner. På grund av tidsbrist samt att lärarna just nu inte undervisade i det område vi skulle genomföra vår studie i, valde vi att inte ha med någon observation utan enbart förlita oss på vad vi fick fram från intervjuerna. Vi är dock medvetna om att detta minskar tillförlitligheten då det är en tolkning av vad någon berättat av vad denna har gjort (sekundär information) istället för en tolkning av direkta händelser som observerats (primär information).

Vid genomförandet av kunskapsprovet som är den kvantitativa metoden hade vi kunnat förändra mycket. En av de saker vi hade kunnat förändra är utformningen av kunskapsprovet genom att vi hade kunnat ha fasta svarsalternativ för att minska kravet om att skriva utförliga svar. Men i och med den höga svarsfrekvensen och att de få elever som inte beskrev hur de tänkte inte heller hade förståelse för talet. Valet att inte svara berodde på okunskap och inte på att eleverna tröttnat på att skriva skriftliga svar. En annan del som vi borde funderat mer på och som vi kanske borde ha använt oss av är att numrera ordningen på papprena så som de blev inlämnade, för att på så sätt se om de elever som var snabba också hade den största matematiska förmågan, då att snabbt vara klar med en uppgift inte alltid behöver innebära att eleven har en bra matematisk förmåga enligt Rockström (2000). Något som då hade kunnat diskuteras via en jämförelse av deras utförlighet i beskrivningarna. De hade också varit bra om eleverna skrivit i vilken ordning de räknat ut uppgiften, alltså om de tänkte färdigt uppgiften i huvudet först för att sedan skriva ner uträkningen eller om de istället räknade färdigt uppgiften via standardalgoritm eller skriftlig huvudräkning för att sedan tänka över svaret. Något som då hade gjort det möjligt att se om eleven tog stöd i skriftlig uträkning eller räknade ut svaret i huvudet. På så vis hade vi kunnat analysera våra resultat utifrån att elever enligt McIntosh (2008) samt Rockström (2000) många gånger gör fel i sina uträkningar för att de tänker sig standardalgoritmens uppställning i huvudet. I och med att vi i vår studie talar om övergeneraliseringen av rak högerkant i standardalgoritmen vore det också bra om vi hade utformat en uppgift för att se om eleverna övergeneraliserar och skriver med rak högerkant eller hade en begreppslig förståelse och satte tiondel under tiondel och hundradel under hundradel osv. Vi borde också i vår intervju ha frågat lärarna om de använder sig av någon övergeneralisering när de introducerar en ny del i matematiken.

Enkäters, liksom kunskapsprovs, resultat blir mer rättvisande desto större urvalet är (Trost, 2012) det samma gäller vid intervjuer (Kvale & Brinkman, 2009). Därför är vi mycket medvetna om att vår studies resultat, av enbart två undersökta klasser ifrån enbart två olika skolor, inte kan generaliseras på hela populationen, men det var inte heller vårt syfte med undersökning.

Fortsatt forskning

Det finns många valmöjligheter när det kommer till att utveckla vår studie, en av dessa inriktningar kan vara att jämföra hur elevernas resultat i de nationella proven hänger samman med undervisning där flera strategier har använts och visats. Med andra ord har de elever som fått undervisning i flera strategier högre betyg jämfört med de elever som inte fått undervisning i flera strategier.

En annan inriktning på vår studie hade varit om man undersökt hur elevernas attityd till matematik påverkas av skriftlig huvudräkning. Om eleverna fått undervisning i skriftlig huvudräkning hade deras attityd till matematiken då förändrats och i så fall på vilket sätt, skulle eleverna då sett matematiken positivt eller negativt. Denna inriktning anser vi hade varit mycket intressant att forska inom då TIMSS 2011 (Skolverket, 2012) presenterade att elevers uppfattning kring matematik är mycket negativ. En ytterligare inriktning att forska vidare inom är hur man som lärare kan öka förståelsen hos de elever som enbart har en strategi. Hur ska man som lärare gå tillväga för att lyckas och på vilka sätt ska man undervisa. Man kan samtidigt undersöka hur det kommer sig att vissa elever har fler strategier än andra. Vad beror det på och hur har det blivit så, beror det på att de elever som har fler strategier också har en större begreppslig förståelse.

Vi har också funderat på hur man hade kunnat utveckla studien med kunskapsprovet och ett förslag hade varit att utgå från individen istället för uppgifterna alltså haft ett individ-centrerat angreppssätt (Nyström, 2008). Om vi hade haft individ-centrerat angrepsätt hade resultaten kunnat analyseras utifrån aspekter som om eleverna kan anpassa sitt val av metod utifrån hur uppgiften ser ut. Hur många strategier i snitt varje elev har samt undersöka om de är samma elev som har rätt eller fel hela tiden. En annan aspekt som man kan analysera är om eleverna skriver och förklarar samma beräkningsstrategi på samma sätt trots att uppgifterna ser olika ut.

En fördjupning som hade kunnat ske är tänka högt observationer, då det hade varit ett bra komplement till kunskapsprovet. Då man hade kunnat genomföra några uppgifter från kunskapsprovet muntligt. Sofkova (2013) säger också att det gör de möjligt för intervjuaren att förstå resonemanget och inte enbart slutprodukten. Detta gör det också möjligt för intervjuaren att se skillnad på de metoder som har använts.

Referenser

Andersson, J. & Dahl, N. (2013). *Tiotalsövergångar i subtraktion: sambandet mellan lärarens undervisning och elevernas val av strategi*. Examensarbete, Högskolan Väst, Samhällsvetenskapliga institutionen.

Bentley, P.O. & Bentley, C. (2011). *"Det beror på hur man räknar!": matematikdidaktik för grundlärare*. (1. uppl.) Stockholm: Liber.

Bentley, P-O. (2012). Framgångsrik undervisning med fokus på det matematiska innehållet. Bilaga 1. I: Skolverket (2012). *Utökad undervisningstid i matematik. Hur en ökning av undervisningstiden kan användas för att stärka elevernas matematikkunskaper*. Rapport 378. Stockholm: skolverket. Hämtad från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.183032!/Menu/article/attachment/Rapport_378_Utokad_undervisningstid_i_matematik.pdf

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). *Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in the UK*. Educational Studies in Mathematics, 51(1), 41-69.

Hedrén, R. (1999). Kan elever hitta på egna skriftliga beräkningsmetoder? *Nämnaren* (4), 8-15. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/008015_99_4.pdf

Hedrén, R. (2006). Elever har rätt att få lära sig matematik. *Nämnaren* (2), 52-53. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5256_06_2.pdf

Hickendorff, M., van Putten, C. M., Verhelst, N. D., & Heiser, W. J. (2010). Individual differences in strategy use on division problems: Mental versus written computation. *Journal of Educational Psychology*, *102*(2), 438-452.

Johansson, B. (2006). Elever har rätt att få lära sig räkna. *Nämnaren* (1), 28-31. Hämtad från http://ncm.gu.se/media/namnaren/debatt/Algoritmer_Bengt_Johansson.pdf

Justesen, L. & Mik-Meyer, N. (2011). *Kvalitativa metoder: från vetenskapsteori till praktik.* 1.uppl. Lund: Studentlitteratur.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (3. [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning: en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Marklund, C.-S. (1993). För mycket algoritmräknande? *Nämnaren*, (3), 13-16. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1316_93_3.pdf

Mardjetko, E., & Macpherson, J. (2007). Is your classroom mental?: Guidelines for enhancing the development of strategies for mental computation. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*(2), 4-9.

McInsosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnaren*, (3), 23-25. Hämtad från http://ncm.gu.se/media/ncm/komp-utv/2325_95_3.pdf

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, Göteborgs universitet.

Mellin-Olsen, S. (1989). Hvem bestämmer hvilken algoritme elevene skal bruke?. *Nämnaren* (3), 40-41. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5256_06_2.pdf

Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies in Mathematics, 56*(1), 3-18.

Nyström, P. (2008). Elevers könsmärkning av matematik: kvantitativ metod i forskning om föreställningar. I C. Rönnqvist & M. Vinterek (Red.), *Se skolan: forskningsmetoder i pedagogiskt arbete* (s.151-164). Umeå: Författarna.

Reys, B. J. & Reys, R. E. (1995). Pespektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnaren* (1), 28-33. Hämtad från http://ncm.gu.se/media/stravorna/2/a/2a_reys.pdf

Reys, B. J., Reys, R. E., Emanuelsson, G., Holmqvist, M., Häggström, J., Johansson, B., … Sjöberg Wallby, K. (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnaren* (2), 23-26. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2326_95_2.pdf

Rockström, B. (2000). *Skriftlig huvudräkning: metodbok*. (1. uppl.) Stockholm: Bonnier utbildning.

Skolverket. (2003). *Lusten att lära: med fokus på matematik*. (Skolverkets rapport, nr 221). Stockholm: Skolverket. Hämtad 9 april, 2015, från http://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FBlob%2Fpdf1148.pdf%3Fk%3D1148

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). *TIMSS 2011: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. (Skolverkets rapport, nr 380). Stockholm: Skolverket. Hämtad 9 april, 2015, från http://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FBlob%2Fpdf2942.pdf%3Fk%3D2942

Sorbring, E. (2013). Konsten att träffa rätt: om enkätundersökningar. I S. Erlandsson & L. Sjöberg (Red.), *Barn- och ungdomsforskning: metoder och arbetssätt*. Lund: Författarna och Studentlitteratur.

Sundell, K. (2008). Skolk som friskhetstecken eller riskbeteende: enkät som datainsamlingsinstrument. I C. Rönnqvist & M. Vinterek (Red.), *Se skolan: forskningsmetoder i pedagogiskt arbete*. Umeå: Författarna.

Trost, J. (2012). *Enkätboken*. (4., uppdaterade och utök. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Van Someren, M. W., Barnard, Y. F. & Sanberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical guide to modelling cognitive processes*. London: Academic press. Från http://echo.iat.sfu.ca/library/vanSomeren_94_think_aloud_method.pdf

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1), 89-94.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilagor

Bilaga 1

Information och samtyckesbrev till lärare i årskurs 4

Hej!
Vi är två studenter, Zandra Eriksson och Amanda Rosén, som läser vår sjätte termin på lärarutbildningen Högskolan Väst, Trollhättan. Vi utför nu ett examensarbete med inriktning på matematik, där syftet är att undersöka undervisning kring strategier i skriftlig huvudräkning vid addition. Undersökningen kommer att ske genom ett kunskapsprov med eleverna samt en intervju med dig som lärare. I och med denna undersökning hoppas vi att kunna bidra med ytterligare kunskaper om undervisningen i aritmetik på mellanstadiet för att i sin tur kunna förbättra elevernas möjligheter.

Du som lärare kommer i vårt resultat att vara helt anonym och kan när som helst avbryta din medverkan. Detsamma gäller eleverna, som får tacka nej till att delta samt fyller i kunskapsprovet helt anonymt. Uppsatsen kommer efter redovisning och godkännande av examinerande lärare att finnas tillgänglig på Högskolan Väst.

Har du ytterligare frågor är du välkommen att höra av dig till
Zandra Eriksson: zaer0001@student.hv.se , 0739539065.
Amanda Rosén: amro0002@student.hv.se , 0731421299.

Med vänliga hälsningar Zandra & Amanda.

Lärarens underskrift:____

Ort och datum:____

Bilaga 2

Intervjuguide

- **Hur länge har du jobbat som lärare?**

- **Vilken utbildning har du?**
  - Hur omfångsrik var matematiken i utbildningen (om tid finns kan läraren få berätta lite mer ingående om innehållet i den).

- **Har du fått någon ytterligare kompetensutveckling inom matematikdidaktik?**

- **Hur länge har du haft denna klass?**

- **Vad tänker du kring elevernas kunskaper i lilla och stora additionstabellen?**
  - Tränar ni dessa på något sätt? Hur?

- **Jobbar du med elevernas förståelse av positionssystemet?**
  - Hur?

- **Hur uppfattar du elevernas förståelse för likhetstecknet?**
  - Vilken definition av likhetstecknet arbetar ni med (Statisk eller dynamisk)?
  - Hur jobbar ni med det?

- **Vad anser du om skriftlig huvudräkning?**
  - Berätta om hur du uppfattar användningen av skriftlig huvudräkning i addition.

- **Vilka förkunskaper anser du att man behöver innan man använder sig av skriftlig huvudräkning?**
  - Ser du att eleverna har nytta av dessa förkunskaper?

- **Vad för metoder introducerar du för eleverna som de kan använda sig av vid addition?**
  - Introducerar du standardalgoritmen?
  - Introducerar du någon/flera skriftliga huvudräkningsstrategier? Vilka i så fall?

- **Ser du att eleverna använder sig av de/den metod som du lärt ut?**
  - Om fler metoder används, är det någon du ser används mest?
  - Ser du att de metoder du introducerat hjälper eleverna?

I detta papper kommer det finnas elva uppgifter. Du väljer själv om du känner att du behöver hoppa över en uppgift. Vi hade uppskattat om du försökte svara på så många uppgifter som möjligt, för att vi ska kunna få en så lyckad undersökning som möjligt.

Vi vill gärna se att du förklarar hur du tänker när du räknar ut uppgifterna. Du kan välja om du vill förklara med hjälp av siffror, ord eller både och.

Tack för din hjälp med vår undersökning!

Uppgifter

Uppgift 1:

52 + 36 =

Jag räknar så här:

Uppgift 2:

65 + 7 =

Jag räknar så här:

Uppgift 3:

1,8 + 5,1 =

Jag räknar så här:

Uppgift 4:

299 + 397 + 198 =

Jag räknar så här:

Uppgift 5:

3,6 + 0,8 =

Jag räknar så här:

Uppgift 6:

43 + 11 + 27 =

Jag räknar så här:

Uppgift 7:

47 + 26 =

Jag räknar så här:

Uppgift 8:

3,6 + 1,2 + 4,4 =

Jag räknar så här:

Uppgift 9:

68 + 53 =

Jag räknar så här:

Uppgift 10:

422 + 135 + 241 =

Jag räknar så här:

Uppgift 11:

383 + 122 + 413 =

Jag räknar så här:

Tolkningsförklaring

*Vid uträkning av andel i procent har vi valt att avrunda till en decimal.

Metod:

Standardalgoritmen	:	**St.A.**
Skriftlig huvudräkningsstrategi	:	**Skr.H.r.**
Complete number approach	:	***Complete***
Räkna från största talet	:	Räk.f.S.
Kompensering	:	Komp.
Flytta över	:	F.Ö.
Hundra-/Tiokamrat	:	H/T
Ombytt ordning	:	O.O.
Split number approach	:	***Split***
Varje talsort för sig	:	Talsort
Uppdelning	:	Delning
Blandning av skriftliga huvudräkningsstrategier	:	***Mix***
"Räkna på fingrarna"	:	**Räk.fing.**
Okategoriserbar	:	**?**
Ingen utskriven förklaring av sin beräkning	:	**Ej skrivit**
Inget svar	:	**EJ svar**

Klass A

Antal svarande: 21 elever

Tabell A

Uppgiftens karaktär jämfört med elevernas val av metod samt rätt/fel svar

					Skriftlig huvudräkning											
					Complete					***Split***						
Talsort	**Antal tal**	**Uppgift**	**Svar**	**St.a.**	Räk.f.S.	Komp.	F.Ö.	H/T	O.O.	Talsort	Delning	Mix	**Räk.fing.**	**?**	**Ej skrivit**	**Ej svar**
Tiotal	Två	1	Rätt	12 = 57,1 %						7 = 33,3 %						
			Fel	1 = 4,8 %						1 = 4,8 %						
			Rätt tänkt, fel räknat													
		2	Rätt	5 = 23,8 %				2 = 9,5 %		5 = 23,8 %	1 = 4,8 %	1 = 4,8 %	2 = 9,5 %			
			Fel	1 = 4,8 %							1 = 4,8 %		2 = 9,5 %		1 = 4,8 %	
			Rätt tänkt, fel räknat													
		7	Rätt	13 = 61,9 %						2 = 9,5 %					1 = 4,8 %	
			Fel	3 = 14,3 %						2 = 9,5 %						
			Rätt tänkt, fel räknat													
		9	Rätt	17 = 80,9 %						2 = 9,5%						
			Fel							1 = 4,8%						1 = 4,8%
			Rätt tänkt, fel räknat													
	Tre	6	Rätt	15 = 71,4 %				1 = 4,8 %							1 = 4,8 %	
			Fel	2 = 9,5 %						2 = 9,5 %						
			Rätt tänkt, fel räknat													
Hundratal	Tre	4	Rätt	7 = 33,3 %				1 = 4,8 %								
			Fel	8 = 38,1 %						2 = 9,5 %						3 = 14,3 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
		10	Rätt	13 = 61,9 %						2 = 9,5 %						
			Fel	3 = 14,3 %						1 = 4,8 %						2 = 9,5%
			Rätt tänkt, fel räknat													
		11	Rätt	14 = 66,7 %						2 = 9,5 %						
			Fel	2 = 9,5 %						1 = 4,8 %						2 = 9,5 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
Decimaltal	Två	3	Rätt	3 = 14,3 %	1 = 4,8 %					7 = 33,3 %						
			Fel							3 = 14,3 %					3 = 14,3 %	4 = 19,0 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
		5	Rätt	2 = 9,5 %				2 = 9,5 %		3 = 14,3 %						
			Fel	1 = 4,8 %						7 = 33,3 %					1 = 4,8 %	5 = 23,8 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
	Tre	8	Rätt	4 = 19,0 %	1 = 4,8 %					4 = 19,0 %					2 = 9,5 %	
			Fel	1 = 4,8 %						3 = 14,3 %					1 = 4,8 %	5 = 23,8 %
			Rätt tänkt, fel räknat													

Klass B

Antal svarande: 29 elever

Tabell B

Uppgiftens karaktär jämfört med elevernas val av metod samt rätt/fel svar

					Skriftlig huvudräkning											
					Complete					***Split***						
Talsort	**Antal tal**	**Uppgift**	**Svar**	**St.a.**	Räk.f.S.	Komp.	F.Ö.	H/T	O.O.	Talsort	Delning	Mix	**Räk.fing.**	**?**	**Ej skrivit**	**Ej svar**
Tiotal	Två	1	Rätt	11 = 37,9 %						16 = 55,2 %		1 = 3,4 %				
			Fel	1 = 3,4 %												
			Rätt tänkt, fel räknat													
		2	Rätt	14 = 48,3 %			1 = 3,4 %	3 = 10,3 %		4 = 13,8 %	6 = 20,7 %					
			Fel								1 = 3,4 %					
			Rätt tänkt, fel räknat													
		7	Rätt	11 = 37,9 %	1 = 3,4 %					13 = 44,8 %		1 = 3,4 %				
			Fel	3 = 10,3 %												
			Rätt tänkt, fel räknat													
		9	Rätt	16 = 55,2 %				1 = 3,4 %		11 = 37,9 %						
			Fel	1 = 3,4 %												
			Rätt tänkt, fel räknat													
	Tre	6	Rätt	14 = 48,3 %	1 = 3,4 %				1 = 3,4 %	10 = 34,5 %					1 = 3,4 %	
			Fel	1 = 3,4 %												
			Rätt tänkt, fel räknat	1 = 3,4 %												
Hundratal	Tre	4	Rätt	12 = 41,4 %						6 = 20,7 %		1 = 3,4 %				
			Fel	5 = 17,2 %						4 = 13,8 %						1 = 3,4 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
		10	Rätt	14 = 48,3 %	1 = 3,4 %					10 = 34,5 %						
			Fel	2 = 6,9 %												2 = 6,9 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
		11	Rätt	16 = 55,2 %						10 = 34,5 %						
			Fel		1 = 3,4 %											2 = 6,9 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
Decimaltal	Två	3	Rätt							24 = 82,8 %					1 = 3,4 %	
			Fel											1 = 3,4 %		3 = 10,3 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
		5	Rätt	1 = 3,4 %					4 = 13,8 %	17 = 58,6 %					1 = 3,4 %	
			Fel							1 = 3,4 %				1 = 3,4 %	1 = 3,4 %	3 = 10,3 %
			Rätt tänkt, fel räknat													
	Tre	8	Rätt	6 = 20,7 %					3 = 10,3 %	11 = 37,9 %		1 = 3,4 %			1 = 3,4 %	
			Fel												3 = 10,3 %	4 = 13,8 %
			Rätt tänkt, fel räknat													

Tabell C

Jämförelse mellan klasserna sett till vilka olika sorters fel eleverna har gjort

						Klass A	Klass B
Alla strategier	Totalt					54 st	26 st
	Övergeneraliseringen "rak högerkant i St.A."					**0%**	**0%**
	Fel som gjorts enbart pga mellanstegen i Skr.H.r.					**1,8%**	**11,5%**
	Fel i taluppfattningen	Totalt				**70,4%**	**61,5%**
		Fel med likhetstecknet				0%	0%
		Fel inom additionstabellen				44,7%	62,5%
		Fel inom positionssystemet				53,3%	37,5%
	Egen felaktig regel - "Adderat vardera talets ental och tiondel som om de var samma talsort"					**0%**	**15,5%**
	Inte kunnat kategorisera					**27,8%**	**11,5%**
Skr.H.r.	Totalt					24 st	6 st
	Blandat ihop olika mellanled					**0%**	**0%**
	Gjort något fel i mellanleden	Totalt				**62,5%**	**50,0%**
		Enbart pga mellanstegen				6,7%	100%
		Fel i taluppfattningen	Totalt			93,3%	0%
			Fel med likhetstecknet			0%	0%
			Fel inom additionstabellen			0%	0%
			Fel inom positionssystemet	Enbart fel i positionssystemet		35,7%	0%
				Egen felaktig regel	"Adderat summan av tiondel och ental som om de var samma talsort"	21,4%	0%
					"Räknat ihop summan av alla talsorter som om de var samma talsort"	42,9%	0%
	Fel i taluppfattningen	Totalt				**29,2%**	**50,0%**
		Fel med likhetstecknet				0%	0%
		Fel inom additionstabellen				100%	100%
		Fel inom positionssystemet				0%	0%
	Inte kunnat kategorisera					**8,3%**	**0%**

Bilaga 5

Vem som gjort vad i vårt examensarbete

Detta har vi gjort tillsammans:

- Formulerat och skrivit uppsatsen.
- Utfört båda lärarintervjuerna.
- Genomfört båda kunskapsproven.
- Formulerat missivbrevet.
- Utformat intervjuguiden.
- Utformat kunskapsprovet.
- Analyserat resultaten från lärarintervjuerna.
- Analyserat resultaten från kunskapsprovet.

Detta har Amanda gjort:

- Tagit kontakt med den kommunala skolan.
- Läst hälften av litteratuern.
- Transkriberat intervjuerna.

Detta har Zandra gjort:

- Tagit kontakt med friskolan.
- Läst hälften av litteraturen.
- Sammanställt svaren från kunskapsprovet i tabeller.

Högskolan Väst
Institutionen för individ och samhälle
461 86 Trollhättan
www.hv.se