Vidden av kommunikationsförmågan i matematikundervisningen

– En studie av problemlösningsmetoder med elever i år 3

Karin Boman

Examensarbete 15 hp
Utbildningsvetenskap 61- 90 hp
Lärarprogrammet
Institutionen för individ och samhälle
Höstterminen 2012

Arbetets art: Examensarbete 15 hp, Lärarprogrammet

Titel: Vidden av kommunikationsförmågan i matematikundervisningen – en studie av problemlösningsmetoder med elever i år 3

Engelsk titel: The Range of Communication Skills in Mathematics Education – a Study of Problem Solving Methods with Pupils in Year 3

Sidantal: 48

Författare: Karin Boman

Examinator: Göran Lassbo

Datum: 3 juni 2013

Bakgrund: I grundskolans läroplan synliggörs tydligt att eleven i matematikundervisningen skall utveckla olika förmågor och att dessa är centrala. En av dessa är kommunikationsförmågan, som är särskilt betydelsefull genom att den sammanlänkas till alla de övriga, såsom de som gäller representation, resonemang och problemlösning. Av denna anledning har kommunikationsförmågan i matematik och medvetenheten kring och utvecklingen av denna hos lärare och elever undersökts i denna studie. En grundförutsättning är att individuell färdighetsträning i lärobok är otillräckligt. Elever bör tidigt få möjlighet till exempelvis arbete i grupp med ett matematiskt problem, då de i tal och skrift kommunicerar matematiska begrepp och metoder. Detta ger förutsättningar för en individualiserad undervisning där elever i samarbete kan utveckla kunskap på många olika sätt.

Syfte: Syftet är att undersöka hur läraren genom sin matematiska kommunikationsförmåga ger stöd för elever att utveckla sin förmåga att kommunicera kring och lösa ett matematiskt problem.

Metod: Studien har en kvalitativ ansats och valda metoder för datainsamling är deltagande observation, intervju och aktionsforskning. Deltagande observationer vid tre undervisningstillfällen med tre elever samt uppföljande enskilda intervjuer har filmats. Undersökningen har inspirerats av aktionsforskning genom att jag själv varit lärare under lektionerna.

Resultat: Studien visar att elever i grupp kommunicerar kring ett matematiskt problem på olika sätt. Det gäller för läraren att vara observant på de olika uppslag som eleverna ger för att inte gå miste om relevanta sätt att tänka. Eleverna har lätt för att tillämpa olika strategier såsom att dramatisera, skriva en tabell, leta efter ett mönster, rita en figur och undersöka ett enklare fall och en fördjupad kommunikation möjliggörs genom dessa. Eleverna visar också i intervjuerna att de själva är medvetna om att strategierna utgör viktiga byggstenar i problemlösningsprocessen, även om de inte ser hela innehållet i dem. Att förklara för varandra och inta de andras perspektiv är relativt svårt för eleverna. En insats av läraren krävs för att fördjupa resonemangen och välja olika lösningssätt för att förklara. Två av de tre eleverna anser att det kan vara svårt att förklara för varandra elever emellan och att det är lättare att förstå när en lärare förklarar. Detta visar på vikten av att läraren specifikt undervisar eleverna i hur de kan kommunicera – såsom att resonera och förklara – för att möjliggöra att deras matematiska kommunikationsförmåga utvecklas.

Förord

Jag vill rikta ett stort tack till dig – klassläraren i år 3 – och dina elever som på ett så beredvilligt sätt ställt upp och velat vara med i min studie.

Ett lika stort tack till min handledare universitetsadjunkt Cecilia Ottersten Nylund vid Högskolan Väst för all hjälp med studien och uppsatsen från början till slut och för alla de intressanta samtal om matematikdidaktik vi haft! Det har varit väldigt trevliga stunder.

Jag vill även tacka min man Arne och mina söner Erik och Gustav för all er uppmuntran och all förståelse för att jag ägnat så mycket tid åt arbetet med uppsatsen.

Tack också till alla er andra som hejat på under arbetets gång! Ni vet vilka ni är.

Innehållsförteckning

1. Inledning

I kursplanen för matematik i Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11 (2011) synliggörs på ett tydligt sätt syftet med undervisningen och de förmågor eleverna skall utveckla. En av dessa förmågor är kommunikationsförmågan, som är väsentlig genom att den kan sättas i nära relation till många av de övriga förmågorna, exempelvis de som omfattar resonemang, representation och problemlösning. Förmågorna i kursplanen utgör en central stomme i elevers matematiska tänkande och vid satsning på kommunikationsförmågan möjliggörs en samtidig utveckling av alla de övriga förmågorna. Det är därför mycket intressant att studera just förmågan att kommunicera matematik. Hur skall man då praktiskt designa matematikundervisningen i grundskolans tidigare år för att ge förutsättningar för eleverna att utveckla denna? Många läroböcker utgår till stor del från individuell, skriftlig färdighetsträning och lektionerna i de tidigare åren styrs till betydande del av detta material. Skolinspektionens granskning (2009) visar att denna typ av matematikundervisning inte är särskilt resultatrik. Den visar också att kursplanens långsiktiga mål i form av förmågor är det som är svårast för skolan att hjälpa eleverna att uppnå. För att skapa en gedigen grund i matematik hos elever är utveckling av förmågorna såsom kommunikationsförmågan lika väsentlig som färdighetsträningen – och detta redan från grundskolans tidigaste år. Det krävs att läraren för egen del medvetandegör vad kommunikationsförmåga innebär och sedan ger elever förutsättningar att öva för att kunna utveckla denna. Ett mycket lämpligt arbetssätt är att låta elever lösa matematiska problem i grupp och i tal och skrift kommunicera matematiska begrepp och metoder. Då ges förutsättningar för en individualiserad undervisning, där varje elev i arbete med andra elever får möjlighet att utveckla kunskap på många skilda sätt. (Ahlberg, 1992; Taflin, 2007) Att verkligen prioritera kommunikationsförmågan kräver studie av och reflektion över hur olika begrepp och metoder i matematiken kan synliggöras i en kommunikationssituation i grupp vid exempelvis problemlösning. Detta kan bana väg för att organisera undervisningen så att utveckling av kommunikationsförmågan såväl som de övriga förmågorna hos eleverna möjliggörs.

1.1 Disposition

Föreliggande uppsats är disponerad på så sätt att i kapitel 2 presenteras studiens syfte och de frågeställningar som detta initierar. I kapitel 3 redogörs för en forskningsbakgrund om kommunikation och kommunikationsförmåga och även specifikt om kommunikationsförmågan i undervisningen. Därefter behandlas i kapitel 4 de teoretiska utgångspunkter som valts för uppsatsen – det sociokulturella perspektivet och variationsteorin – och motiveringar till varför dessa använts. Kapitel 5 utgörs av en metoddel där studiens design beskrivs och den ansats och de metoder som tagits i anspråk för undersökningen behandlas; nämligen en kvalitativ ansats, deltagande observation, intervju och aktionsforskning. Här redogörs även för andra aspekter av arbetsgången i studien, såsom tillvägagångssättet vid datainsamling och analys samt etiska ställningstaganden. I de avslutande avsnitten i detta kapitel diskuteras studiens validitet och reliabilitet. I kapitel 6 redovisas studiens resultat och en analys av dessa. Därpå följer i kapitel 7 en diskussion av resultaten och vilka svar de ger i relation till forskningsbakgrunden. Även de didaktiska konsekvenserna av resultaten behandlas och de valda metoderna diskuteras. Avslutningsvis föreslås områden för fortsatt forskning, vilka inte kunnat beaktas inom ramen för denna studie.

2. Syfte och frågeställningar

2.1 Syfte

Syftet är att undersöka hur läraren genom sin matematiska kommunikationsförmåga ger stöd för elever att utveckla sin förmåga att kommunicera kring och lösa ett matematiskt problem. Ur detta syfte utkristalliserar sig följande frågeställningar:

2.2 Frågeställningar

Hur kommunicerar eleverna med varandra och med läraren vid lösning av ett matematiskt problem i grupp?

Hur bearbetar och analyserar eleverna problemet?

Hur bidrar läraren i kommunikationen för att utmana och utveckla elevernas kommunikationsförmåga?

Vilka effekter får lärarens bidrag på arbetet i gruppen?

3. Forskningsbakgrund

3.1 Kommunikation och kommunikationsförmåga

Ordet ”kommunikation” kommer av latinets ”communicare”, som innebär att något blir gemensamt (Nilsson och Waldemarson, 1994). Det betyder att vi inte bara meddelar oss med andra utan också delar med oss av någonting, såsom tankar, innebörder, upplevelser och handlingar. I denna uppsats behandlas den verbala delen av begreppet kommunikation och således inte den icke-verbala, såsom miner och kroppsspråk.

Kommunikationsförmågan är en av förmågorna i Lgr 11 (2011). Denna förmåga är central eftersom kommunikation även ingår i alla de övriga förmågorna. Men vad innebär då kommunikation mer exakt? I kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) finns en definiering av begreppet. Att kommunicera förklaras som ”att utbyta information med andra om matematiska idéer och tankegångar, muntligt, skriftligt och med hjälp av olika uttrycksformer” (a.a., s. 11). Eleverna övas i ett precist matematiskt språk för att kunna modifiera sin kommunikation till olika mottagare och ändamål. Skolverket slår här fast att det är först när elever har utvecklat kommunikationsförmågan som matematiken kan bli ett funktionellt verktyg i olika situationer. I definitionen av kommunikation i matematik ingår också som en viktig del att kunna lyssna till och förstå andras redogörelser, förklaringar och argument, innehållande matematiska begrepp och uttrycksformer. En annan väsentlig komponent av kommunikationsbegreppet är att kunna variera uttrycksformer, främst för att öka begreppsförståelsen. Ytterligare en del av den matematiska kommunikationen är att kunna föra resonemang. Ett exempel på detta är att med matematiska argument resonera om samband. (Skolverket, 2011) Kommunikation av matematik definieras alltså i kursplanen på ett mångfacetterat sätt och innefattar inte enbart kommunikations- utan också resonemangs- och representationsförmågorna.

Niss och Höjgaard Jensen (2002) behandlar i den danska rapporten ”Kompetencer och matematiklaering” olika matematiska kompetenser som skall främja elevers matematikutveckling. Således kallas förmågorna här för kompetenser. Författarna beskriver åtta delkompetenser, vilka tillsammans bildar den totala matematiska kompetensen, och att dessa bör inkluderas i undervisningen på alla nivåer i utbildningen. En av delkompetenserna är kommunikationskompetensen, som karakteriseras på följande sätt: att kunna tolka ett matematiskt innehåll i andras presentationer och att kunna uttrycka sig på skilda sätt och skilda nivåer om matematiska företeelser för olika kategorier av mottagare. Kommunikationen gäller i, med och om matematik och kan vara skriftlig, muntlig eller visuell. En skillnad jämfört med definitionen i de svenska styrdokumenten är att här grundas kommunikationen inte på ett lika tydligt sätt på olika uttrycksformer/representationsformer. Representationskompetensen är sin egen och inte en del av kommunikationskompetensen – dock poängteras att de båda har ett nära släktskap. Även resonemangskompetensen är en självständig kompetens och då betonas i högre grad formaliteter, dvs. att kunna följa, bedöma och också genomföra ett matematiskt resonemang som utgörs av välordnade argument till stöd för ett matematiskt påstående. Men även analyserande motiveringar av svar och lösningar på uppgifter och problem ingår. (a.a.)

Niss och Höjgaard Jensen (2002) beskriver således att kommunikation kan innebära att uttrycka sig på skilda sätt och skilda nivåer om matematiska företeelser avpassat till mottagaren. De tar upp att matematikens precisa språk ofta krävs, men i vissa fall i matematiska diskussioner, t.ex. elever emellan, kanske även en hel del vardagsspråk behöver inkluderas för att förklara för och förstå varandra. Det talade ordet är ju också en av matematikens uttrycksformer, som kommunikation kan utgå ifrån.

Kommunikationsförmågan allmänt i skolans ämnen framträder relativt tydligt i del 1 i Lgr 11 (2011), där skolans värdegrund och uppdrag behandlas. Där framhålls i fråga om skolans uppdrag att elevers lärande och utveckling av identiteten hänger samman med deras språkutveckling. Därför skall elever ges goda möjligheter att samtala, läsa och skriva för att stärka sin förmåga att kommunicera och därmed få en ökad tro på sin egen språkliga kapacitet. (a.a.) Även i del 2 om övergripande mål och riktlinjer synliggörs kommunikationsförmågan. Ett av målen är att elever skall kunna undersöka och arbeta självständigt och i grupp och uppleva en tro på sin egen förmåga. Elever bör också utveckla förmåga att tänka kritiskt och att uttrycka egna ståndpunkter. Läraren skall ge elever stöd i sin utveckling av språk och kommunikation.

Förändringar i förhållande till den föregående kursplanen kopplad till Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet, Lpo 94 (2006) redogörs för i Skolverket (2011). Det framhålls att vikten av att elever utvecklar förmågan att kommunicera i matematik med olika uttrycksformer och att använda sig av logiska resonemang poängteras i större utsträckning än i den föregående kursplanen. I Skolverket betonas även matematik som ett kommunikativt ämne där användningen av matematiken i olika situationer och sammanhang är väsentlig. Kreativa och problemlösande aktiviteter accentueras också. Just problemlösning i matematik lyfts fram som central och innebär att det blir möjligt för elever att utveckla kursplanens olika förmågor.

Nilsson och Waldemarson (1994) menar att kommunikation innebär att vi pratar och agerar med varandra. Det tyder på att betoningen här ligger på den muntliga delen av kommunikationen. Detta skiljer sig från Skolverkets (2011) och Niss och Höjgaard Jensens (2002) definitioner, som även innefattar skriftliga och visuella komponenter, vilket innebär en bredare beskrivning. Nilsson och Waldemarson å sin sida lägger tonvikten på hur kommunikationen kan bekräfta vår identitet och självkänsla. De framhåller vidare att kommunikation är en process, som innefattar svårigheter och dilemman, men den innehåller också många andra intressanta perspektiv och dimensioner. Förmågan att kommunicera är också något vi måste öva och utveckla för att kunna uttrycka oss lite klarare och djupare och för att i övrigt förbättra samspelet med andra. (a.a.)

Att kommunicera i allmänhet och att göra det i matematik är två till stor del skilda saker. Nilsson och Waldemarson (1994) framhåller att i talspråket finns en grundläggande mångtydighet. Människor räknar inte med att få en komplett bild av det uttalade. Det skulle vara alltför tidsödande att alltid vara precis och konkret i det vi yttrar. Det är vanligt att mottagaren själv reder ut oklarheter och ofullständiga yttranden. (a.a.) I motsats till detta är precisionen i kommunikation i matematiken väsentlig. Lärare undervisar eleverna i matematiska begrepp, termer och ett symbolspråk, eftersom dessa är en väg in i matematiken. Hagland, Hedrén och Taflin (2005) beskriver skillnaden mellan den konkreta omvärlden och den abstrakta matematiska världen, åtskilda av en ”mur” och det gäller för läraren att skapa förutsättningar för elever att ta sig över denna och därefter tillbaka igen. För att uppnå det precisa språk som matematiken kräver bör utgångspunkten vara det verkliga livet och den slags matematik eleverna tänker där. Då möjliggörs för dem att överföra sina begrepp från vardagen till matematiska begrepp. (a.a.)

Nilsson och Waldemarson (1994) menar härutöver att vi i kommunikationen inte kan översända avtryck av idéer till en annan människa, utan budskap som utgör *symboler* för idéerna. En idé omformas till symboler och sänds och under optimala förutsättningar tar mottagaren in denna och tolkar den till samma idé i sina tankar. Att mottagaren får ungefär samma idé i sina tankar är en förutsättning för förståelse. (a.a.) Ahlberg (1992) hävdar däremot att kommunikation inte är en process för att överföra kunskaper utan för att utveckla och fördjupa de kunskaper som redan finns. När elever verbalt delar med sig till varandra av sina tankar kan det uppstå en typ av kommunikation där sändaren genom att tala utifrån sina tankar får större klarhet i dem. Mottagaren får genom att tolka sändarens tal också en större förståelse av den aktuella företeelsen.

3.2 Kommunikationsförmågan i undervisningen

En elev bör få tillfälle att visa sina kunskaper i matematik på många skilda sätt för att beskriva sina strategier. Taflin (2007) för fram fyra olika representationer som väsentliga vid problemlösning för att utgöra ett stöd och ett uttryck för tanken.

- Konkret representation: en avbildning av en verklig eller en tänkt företeelse.
- Logisk/språklig representation: förklaring med användning av det svenska språket.
- Aritmetisk/algebraisk/analytisk representation: användning av matematiska symboler.
- Grafisk/geometrisk representation: vedertagen bild av hur en uppgift lösts, t.ex. en tabell eller ett diagram.

(Taflin, 2007, s. 69, min övers.)

För att elever skall ges förutsättningar att erhålla väl fungerande mentala ”inre representationer” bör dessa ”yttre representationer” varieras. (a.a.)

Problemlösning i grupp är av flera olika anledningar ändamålsenlig som matematisk aktivitet och ett kraftfullt verktyg för att öva förmågorna och då särskilt kommunikationsförmågan (Taflin, 2007). Problemlösning har utgjort huvudmoment i skolans läroplaner sedan 1980 (Löwing, 2006) och innebär en aktivitet med ett för eleven okänt problem. Problemlösarens uppgift är att tolka problemet och se vad som skall lösas och det förutsätts en särskild ansträngning. Jämfört med att eleven enskilt löser ett problem kan i en grupp breddning och fördjupning av kunskaperna ske. (Ahlberg, 1992; Taflin, 2007) Vid problemlösning kan en rad aspekter kommuniceras, såsom matematisk begreppsförståelse, synliggörande av samband, val av fungerande strategier och en uppskattning av rimligheten i svaret. Det är då lämpligt att använda några av eller alla fyra ovanstående representationsformer eller enklare former av dessa. (Ahlberg, 1992; Ahlberg, 2011; Taflin, 2007) Ahlberg (1995) beskriver hur barn i fem-sexårsåldern räknar på ett informellt sätt med hjälp av saker, ”modellerar” och räknar på fingrarna. På detta vis använder de sig redan då av många olika sätt för att lösa matematiska problem i vardagen, som sedan kan byggas vidare på när barnet möter skolmatematiken. Skolverket (2011) betonar vikten av att i undervisning ge eleverna förutsättningar för fördjupad förståelse av hur verktyg kan användas för att beskriva och tolka företeelser och lösa och formulera problem.

De matematiska idéerna i form av t.ex. mönster, kombinatorik och geometri kan skrivas som numeriska, algebraiska och geometriska uttryck. Resonemangen kan generaliseras och detta är matematikens abstrakta sida och också dess styrka. Men den tillämpas i den konkreta matematiken och för dessa omvandlingar krävs språklig förmåga att formulera och argumentera. Detta ger språket en stor betydelse för matematiken. (Löwing, 2006; Riesbeck, 2008)

Betydelsen av kommunikationen och språket i matematiken för att tydliggöra övergångar mellan abstrakt och konkret matematik kan också gälla för övergångar i den motsatta riktningen vid tänkande och lärande (Ahlberg, 1992; Ahlberg, 2011; Löwing 2006; Riesbeck, 2008). Ahlberg betonar vikten av att för elever presentera det formella och generella matematiska språket i sammanhang där skolans matematik till en början kan bekräftas av elevernas tänkande i vardagen och detta sker då i en kommunikativ miljö. Elevernas vardagliga kapacitet i matematik är situationsbunden och direkt relaterad till företeelser eller föremål. Skolmatematiken är i hög grad abstrakt med många symboler, men just detta gör den också till ett effektivt verktyg vid t.ex. problemlösning. För att lära sig att generalisera matematiska kunskaper och att nyttja dem vid olika frågeställningar fordras ett ökat abstrakt tänkande och handhavande av symboler i lärandet. När det matematiska symbolspråket introduceras för eleverna är det således av stor vikt att göra det i vardagliga sammanhang. (a.a.) Här menar dock Löwing (2006) att all matematik inte kan konkretiseras, utan en del av matematikämnet grundas på logik och definitioner som enbart är abstrakt matematiska, t.ex. komplexa tal eller det geometriska formelspråket. Detta då till skillnad från den del som har sin grund i den konkreta vardagen, t.ex. enkla huvudräkningsmetoder och enkel procenträkning.

Rik kommunikation i matematikundervisningen betonas även av Bergqvist och Österholm (2012) när de behandlar betydelsen av lärarens skicklighet att lyfta fram ett matematikinnehåll i undervisningen för att få elever att förstå. De konstaterar i sin analys att det finns många ord i svenska styrdokument i matematik som kan förknippas med olika aspekter av kommunikation och att detta begrepp därmed lyfts fram på ett markant sätt. Men när behövs en särskild typ av kommunikation i just ämnet matematik? Här poängteras alltså lärarens matematiska kommunikationsförmåga i undervisningen, men också en specifik typ av kommunikation i sammanhang när det gäller användning av olika representationsformer (t.ex. konkret och logisk/språklig).

Riesbeck (2008) framhåller härutöver ett annat skäl till att språket är så väsentligt i matematiken. Att en människa tänker på ett matematiskt sätt, menar hon, kräver väl förankrade matematiska idéer hos honom/henne och också en förmåga att argumentera för en företeelse t.ex. vid problemlösning. För att uppnå denna förtrogenhet fordras färdighet – men också, inte minst viktigt – språkligt formulerad kunskap med förmåga att argumentera. När hon diskuterar språkets betydelse utgår hon ifrån begreppen tala, tänka och skriva och när dessa ingår i undervisningen, menar hon, kan elever beredas större medvetenhet och delaktighet i matematiken. Dessa tre begrepp är inbördes beroende av varandra och genom att tala och skriva om matematiska begrepp på skilda sätt förstärks således tänkandet och lärandet. Riesbeck benämner detta den *gestaltande* diskursen. Hon betonar även vikten av att öva ett aktivt och kritiskt lyssnande och läsande, vilket leder till ett *tolkande* av matematiken.

Vygotskij (2001) framhåller att genom språket utvecklas en människas begreppsbildning och menar att skriftspråket utgör den mest utvecklade språkformen, som uppstår ur de andra formerna och interagerar med dessa. Möjligheten att gå tillbaka och reflektera över det skrivna språket gör det också till ett effektivt verktyg för tänkande och kommunikation. Ahlberg (1992) tar fasta på vikten av att elever får skriva och då i matematikämnet. I sin studie låter hon elever skriva berättelser helt fritt om matematiska problem för att de på ett fantasifullt sätt skall kunna bearbeta innehållet, utvidga sammanhanget och ge förslag till en lösning. På detta sätt, menar Ahlberg, inkluderas räknefärdigheten naturligt och skriftspråket kan bli ett sätt att översätta formellt matematiskt symbolspråk (som till stor del är ett skriftspråk) till elevernas vardagliga språk.

Tyst enskild räkning som innebär färdighetsträning är alltför vanligt förekommande i den svenska grundskolan och detta utgör ett problem (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008; Skolverket, 2003, 2004). Det behövs en utveckling och det är av stor vikt att förena färdigheter och förståelse i undervisningen så att dessa matematiska kunskaper utvecklas parallellt hos eleverna. Färdigheter i form av t.ex. tabellkunskaper och att kunna utföra räkneoperationer – främst i läroböcker – krävs som grund. Elever kan sedan tillsammans med hjälp av språket sätta fokus på val av hållbara metoder och strategier vid problemlösning och därigenom utveckla sin matematiska förståelse. (Ahlberg, 1995; Ahlberg, 2011; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008) I styrdokumenten för skolan och i studier poängteras också sedan länge vikten av att tala matematik (Lgr 11, 2011; Lpo 94, 2006; Skolinspektionen, 2009). Men då uppstår frågan hur detta skall ske. Vad menas när uttrycket ”att tala matematik” används? Förutsättningen blir då att läraren har ett språk för att kommunicera matematiska kunskaper. Övergången mellan vardagsmatematiken och matematikens värld kan underlättas genom samtal mellan lärare och elever, t.ex. i problemlösning med konkret material. Där kan en viktig pendling mellan vardagliga och matematiska begrepp och uttryck urskiljas. Detta ger samtalet en mycket viktig funktion för förståelse för övergångar mellan vardagliga begrepp och diskurser och matematiska. (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008) Läraren bör i sin kommunikation med elever undersöka deras förförståelse och ge dem tid att förklara hur de ser på ett problem och att verkligen göra ämnesinnehållet till fokus för undervisningen. Därutöver är det av vikt att efter ett matematiktillfälle gemensamt sammanfatta och reflektera över elevernas arbete och utmana dem genom att visa på olika alternativa lösningsmetoder och hur kunskapen kan användas i andra sammanhang. (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Taflin, 2007)

Det är vanligt förekommande att elever – och även lärare – väljer antingen att uppehålla sig i en vardaglig diskurs eller en matematisk. Eleverna hamnar i ett vardagligbetonat ”görande” utan reflektion eller i en matematik som blir en teknik för hantering av tecken och symboler. (Löwing, 2006; Riesbeck, 2008) Det är väsentligt att eleverna uppmärksammas, främst av läraren, på skillnaderna i form av konkret och abstrakt tänkande mellan de båda diskurserna och vad de står för, vilket möjliggör förståelse av de matematiska begreppens väsen. Först då kan eleverna utföra en uppgift med problemlösning med hjälp av båda tankesätten. Lärare skulle då kunna – genom att formulera frågor till eleverna – utmana dem och möjliggöra utveckling av deras tänkande och kommunikation. (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008; Taflin, 2007) Riesbeck (även t.ex. Ahlberg, 1992; Löwing, 2006) nämner exempel på frågor: ”Vad innebär det att? Hur ser du på detta? Varför blir det på det sättet?” (Riesbeck, 2008, s. 65). Det kräver en medvetenhet hos läraren att använda rikligt av det matematiska, specifika språket i relation till vardagsspråket och att det således blir synligt både för honom/henne själv och för eleverna. Läraren bör – tillsammans med eleverna – fundera över vad de talar om, på vilket sätt och varför och även innebörderna av det hela. Att eleverna får *gestalta* och *tolka* sin kunskap, enligt tidigare ovan, och således även *reflektera* över den blir mycket väsentligt för deras meningsskapande. (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008)

Hur fungerar då elevers samspel och arbete i mindre grupper, till exempel vid problemlösning i matematik? Runesson (1995) beskriver att elever själva måste ta ansvar för lärandet i ett grupparbete och detta skiljer sig markant mot undervisning i klass. Eleverna tvingas att själva fördela taltid och bedöma inlägg och över huvud taget driva arbetet framåt. De använder sin erfarenhet, formulerar frågor, kommer med förslag till lösningar och argumenterar. När elever berättar om hur de tänker utvecklas samtidigt deras tänkande och motsättningar i detta kan synliggöras, vilket ger möjlighet till en utveckling av deras uppfattningar. Lärarens sätt att fundera kring ett innehåll kan se lite annorlunda ut än elevernas. Därför kan det för många elever ligga närmare till att förstå när en annan elev förklarar än när läraren gör det. Under fördelaktiga sociala omständigheter medges således större förutsättningar att använda elevers eget tänkande än vid annan typ av undervisning. Även Nilsson (2005) framhåller fördelar med grupparbete när argumentation och slutledning ingår i en uppgift. Stora möjligheter finns att kreativiteten då kan öka genom att det blir många infallsvinklar att utgå ifrån. I strid med detta framförs emellertid i Ahlbergs (1992) studie att enligt lärarna där gäller diskussioner mellan elever i smågrupper sällan ett fördjupat innehåll. Eleverna anger inte motiveringar till sina lösningar på ett tillräckligt fungerande sätt. De förklarar inte, utan ger korta, generella omdömen om olika förslag till lösningar. Lärarna upplever det vara svårt att gå in och försöka fokusera mot ett specifikt innehåll eller på annat sätt fördjupa resonemangen i samtalet. Löwing (2006) framhåller med resultat från sin studie en liknande ståndpunkt att det krävs en hel del didaktisk förmåga hos läraren vid matematiskt arbete i grupp för att skapa kunskapshomogena grupper, att alla elever är delaktiga i arbetet och att argumentationer och resonemang kan bli fördjupade. Elever har svårt att utveckla det matematiska språket och kommunikationsförmågan på egen hand.

4. Teoretiska utgångspunkter

Det perspektiv som valts för uppsatsen är det sociokulturella perspektivet, som vilar på teorin social konstruktivism. Perspektivet har ett relativt vidsträckt synsätt och kan användas i didaktik för ett flertal skolämnen. Därför har detta perspektiv kompletterats med en teori som är mer inriktad mot lärandeobjektet specifikt i matematik, nämligen variationsteorin.

Perspektivet och teorin kommer nu att beskrivas nedan och även andra motiveringar kommer att ges till varför dessa valts.

4.1 Sociokulturellt perspektiv

I teorin social konstruktivism, enligt Piaget, utgör det sociala interagerandet ett element genom vilket kunskap byggs upp och byggs om. Intellektuella funktioner betraktas som en produkt av medverkan i en social, historisk och kulturell kontext och kunskap som genereras är både individuell och social (Runesson, 1999). Teorin social konstruktivism har dock i denna uppsats valts bort till förmån för en förgrening och utveckling av denna - det sociokulturella perspektivet enligt Vygotskij (1978, 2001). Båda har tanken om det kollektiva gemensam, men i det sistnämnda betonas språkets betydelse för lärandet på ett mer markant sätt (Vygotskij, 2001). I uppsatsen är språket väsentligt för det centrala begreppet kommunikation och för undervisningstillfällena med lösning av matematiska problem i grupp. Ett annat skäl till att språket tydligt bör vara inkluderat i valda teorier och perspektiv är att matematiska objekt inte är synliga och möjliga att undersöka på ett direkt sätt, utan istället får representeras av ord, symboler, tecken och bilder (Duval, 2000) . Den matematiska kunskapen finns alltså inte påtaglig och ”färdig att lära in” och här får elevers och lärares aktivitet i ett socialt skeende en central roll. Det precisa samtalet blir därför väsentligt att studera och försöka förstå. (Riesbeck, 2008) Ytterligare ett skäl till att det sociokulturella perspektivet valts för uppsatsen är att lektionstillfällena hålls med en elevgrupp och undervisningen där är socialt och kulturellt betingad.

Det sociokulturella perspektivet på lärande poängterar således i hög grad språkets och kommunikationens betydelse för inlärning (Vygotskij, 2001). Dessa används i ett sammanhang, som är av stor vikt för själva lärandet. Vygotskij menar att inlärning och utveckling hos barn sker i samspel med andra genom imitation. Vygotskij framhåller vidare att barnets kapacitet att genom samarbete nå en högre intellektuell nivå och att röra sig från det kända till det som det inte kan med hjälp av imitation – i vidare bemärkelse – är centralt för inlärningen som helhet. Denna inlärning får avgörande betydelse för utvecklingen och är också det väsentliga innehållet i begreppet ”the zone of proximal development” eller ”den närmaste utvecklingszonen”. I skolan får barnet möjlighet att fokusera ”den närmaste utvecklingszonen” med många potentiella övergångar till ny kunskap. Barnet får tillfälle att lära sig det han/hon ännu inte kan och det sker i samarbete med läraren eller med en lite duktigare elev (a.a.). Det är störst chans att lära sig något som finns att uppnå inom rimligt räckhåll och det som barnet idag har förmåga att göra i samarbete kan det imorgon göra självständigt. Utvecklingszonen är den mest väsentliga beståndsdelen i förhållandet mellan inlärning och utveckling. (a.a.) Inlärningen är härutöver som mest gynnsam då den kommer tidigare än utvecklingen. Då stimulerar den många funktioner som är i ett mognadsstadium och befinner sig i ”den närmaste utvecklingszonen”. Detta, hävdar Vygotskij, är inlärningens mest betydelsefulla roll för utvecklingen. Inlärningen skulle vara helt överflödig om den bara kunde nyttja det som redan mognat genom utveckling och om den inte själv kunde starta en utveckling och därmed något nytt.(a.a.)

Det sociokulturella perspektivet, enligt Vygotskij, har en annan syn på förutsättningar för ett barns optimala utveckling än teorin om social konstruktivism enligt Piaget (Vygotskij, 1978, 2001). I social konstruktivism beskrivs ett barns biologiska utvecklingsstadier och att dessa styr hans/hennes kognitiva utveckling och bestämmer att kunskap endast är möjlig att tillägna sig i stegvisa nivåer i en viss, bestämd ordning (Vygotskij, 2001). Här stödjer inlärningen sig således på redan mogna funktioner medan den i det sociokulturella perspektivet stödjer sig på funktioner som håller på att mogna (a.a.). Vygotskij menar alltså, i motsats till Piaget som lägger tyngdpunkten på biologisk mognad, att utveckling hos ett barn beror både på biologiska och kulturella förutsättningar och att dessa komponenter är sammanflätade (Vygotskij, 1978).

Vygotskij (2001) behandlar vidare utveckling av tänkande och språk hos människan och menar att detta sker i kommunikation i ett socialt sammanhang enligt ovan. Han redogör för hur vi utnyttjar den kognitiva resurs som språket utgör och menar: ”Tanken uttrycks inte i ordet, utan fullbordas i ordet.” (a.a., s. 404). Det sker alltså en utveckling vid överföringen mellan tanke och ord och det kan benämnas som att tanken blir till i ordet.

Säljö (2000) utgår från Vygotskij (1934/1986, 1978 et al.) och det sociokulturella perspektivet på lärande när han beskriver hur individer och grupper tillägnar sig kunskap – vad gruppen åstadkommer tillsammans och vad enskilda individer klarar. Han reflekterar också över hur gruppens gemensamma kunskap kan återskapas hos den enskilda individen. Detta kan jämföras med imitationen i vidare bemärkelse som nämnts ovan och som betraktas som central för inlärning (Vygotskij, 2001). Säljö beskriver vidare att människan verkar i en kultur och också använder olika redskap för att få syn på och bearbeta omvärlden och vår gemensamma kunskap. Redskapen innebär resurser, dels intellektuella och dels fysiska, som vi har möjlighet att använda i interaktionen med vår omvärld. Med hjälp av redskapen och i samspel med andra utgår vi från de premisser som finns av naturen givna för den enskilda individen. Detta innebär att vi nyttjar de erfarenheter tidigare generationer gjort och därmed kan vi erhålla ett enastående utbyte. I allt detta är kommunikationen och interaktionen mellan individer av central betydelse. Med hjälp av kommunikation blir sociokulturella resurser till och genom kommunikation vidarebefordras de. (Säljö)

4.1.1. Bärande begrepp i det sociokulturella perspektivet

I det sociokulturella perspektivet på lärande och utveckling finns flera begrepp som kan vara lämpliga som analysverktyg i en studie av kommunikation. Begreppet *kommunikation* i sig är centralt och det är i kommunikation som människan får del av kunskaper och färdigheter. Barnet föds in i interaktiva och kommunikativa skeenden, där tolkningar och förståelse av omvärlden redan finns tillgängliga. (Vygotskij, 2001) Begreppet *kommunikation* kan användas genom att studera hur kommunikationen sker vid undervisningstillfällena; faktorer som gör att den utvecklas eller att den istället försvagas. Andra passande begrepp är *redskap* och *mediering*. *Redskap* innebär de resurser i form av tecken och verktyg - både intellektuella/språkliga och fysiska - som vi använder i interaktion med vår omvärld (Vygotskij, 1978). *Mediering* innebär förmedlandet av omvärlden till individen och själva interaktionen med omvärlden med hjälp av nämnda redskap (Vygotskij, 1978). Dessa båda begrepp är användbara vid analys av de olika slags redskap som nyttjas vid undervisningstillfällena och på vilket sätt de kommer i bruk. Vid analys är även begreppet *”the zone of proximal development”* eller *”den närmaste utvecklingszonen”* ändamålsenligt. Det innebär, i enlighet med ovan, den zon i ett lärande där det finns kunskap inom räckhåll och där det är störst förutsättningar för ett barn att lära (Vygotskij, 2001). Möjligheterna som ges eleverna att befinna sig i denna zon vid lektionstillfällena kan studeras och analyseras.

4.2 Variationsteori

När undervisning ventileras – särskilt i fråga om möjliga förändringar – ligger ofta fokus på organisation, arbetssätt och arbetsformer (Runesson, 2000). I variationsteorin betonas varken detta eller undervisningens sociala aspekt, utan istället ett specifikt undervisningsinnehåll (Runesson, 1999). Teorin har sin grund i den fenomenografiska forskningsansatsen (Marton, 1981, refererad i Runesson 1999, s. 26). Lärande betraktas som förändringar i sätt att erfara ett visst fenomen. Skillnader i sätt att erfara kan förklaras som skillnader i medvetandets struktur och ”rörelse”. (Runesson, 1999) Runesson beskriver ett medvetande som är avhängigt tid och rum och i medvetandet är något i fokus som figur och annat finns där som bakgrund. Vårt medvetande är alltid riktat mot något och det vi erfar är meningsfullt för oss. Runesson tar sin utgångspunkt i Marton och Booth (1997) och återger hur medvetandet står i relation till hur vi erfar och förstår aspekter av vår omgivning och därmed hur vi lär oss. En avsiktlig förändring i medvetandets fokus är grunden för lärande.

Marton och Booth (1997) framhåller att för att förstå hur människor *handskas* med situationer så ger förståelse för hur de *erfar* situationerna en bakgrund till varför de agerar som de gör. Följaktligen visar en människas agerande i ett visst sammanhang något om hur människan erfar detta.

Variationsteorin har valts som en utgångspunkt för studien eftersom det är väsentligt att undersöka hur eleverna erbjuds att erfara, uppfatta och förstå och därmed vilka förutsättningar som finns för inlärning vid undervisningstillfällena. Variation är en dimension av lärande i matematik som studeras och används i studien främst genom att en strävan finns att visa flera möjliga sätt att lösa ett matematiskt problem. Eleverna får möjlighet att möta och uppfatta olika sätt att lösa problemet och de tar sedan till sig dessa på olika vis. Liksom i det sociokulturella perspektivet är även här språket inkluderat genom att undervisning i enlighet med variationsteorin förutsätter språklig aktivitet för att utveckla ett erfarande och en större förståelse. Detta i sin tur förutsätter kommunikation, som är ett centralt begrepp i uppsatsen.

4.2.1. Bärande begrepp i variationsteorin

Ett nyckelbegrepp i variationsteorin är *erfarande*, som står för en synonym till uppfatta och förstå (Runesson, 1999). Det kan vara ett verktyg för att analysera undervisningstillfällena i undersökningen genom iakttagelse av hur utveckling av de tre elevernas erfarande möjliggörs.

Ett annat väsentligt begrepp är *urskiljning*. För att uppfatta och erfara krävs att aspekter urskiljs på ett särskilt sätt. Fenomenet skall urskiljas från sitt sammanhang och delar av fenomenet skall urskiljas och förknippas med andra delar och med helheten. (Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999)

Urskiljning och simultanitet innebär att olika aspekter urskiljs och även relationen dem emellan och att dessa finns i medvetandet på samma gång (Runesson, 1999). Ett exempel kan vara en förståelse för talet ”fem”, som då *samtidigt* urskiljs som talet ”fem” i räkneramsan, storleken av en viss mängd eller ”fem” som helhet *och* med delarna ”två” och ”tre” (a.a.). Men en sådan typ av urskiljning kan vara svår för människor att klara och blir en viktig faktor för hur erfarandet ter sig (Marton & Booth, 1997). Marton och Booth betonar att det är av betydelse hur medvetandet är strukturerat i ett visst ögonblick. En god struktur med flera samtidigt urskilda aspekter ger ett mer högkvalitativt erfarande och en större meningsfullhet. Skillnader i strukturer i medvetandet medför således erfarande på skilda vis (a.a.). *Urskiljning och simultanitet* kan användas som analysverktyg i studien genom undersökning av om och i vilken utsträckning detta förekommer.

Med *urskiljning och variation* menas att för att en aspekt skall vara urskiljningsbar krävs att det går att erfara en variation av den. Det blir väsentligt att ”[…] för att veta vad något är, måste vi veta vad något *inte* är.” (Runesson, 1999, s. 31). Ett exempel kan vara att vi erfar ett objekt som rött, eftersom vi vet att färgen också kan variera och vara en annan. Begreppen urskiljning, simultanitet och variation är således alla centrala i variationsteorin och står i relation till varandra (a.a.). Det är av stor vikt hur en människas medvetande är strukturerat och vad som urskiljs som figur/figurer och vad som finns som bakgrund i form av möjliga variationer. Detta utgör fokus vid inlärning enligt denna teori. *Urskiljning och variation* kan vara ett verktyg vid analys av undersökningen genom studie av om detta används vid undervisningstillfällena och i så fall i vilken utsträckning och på vilket sätt.

4.2.2 Variationsteorins innebörder i övrigt för undervisning

I undervisning är det väsentligt att läraren varierar vissa aspekter av en företeelse och håller vissa konstanta, vilket ger förutsättningar för eleverna att erfara på ett tydligt sätt (Runesson, 1999). Det gäller att medvetandegöra den kritiska aspekten – det vill säga exakt det som är lärandeobjektet och som kan vara svårfångat – genom att eleverna ges möjlighet att urskilja med hjälp av en viss variationsrymd, dvs. potentiella dimensioner av variation. Variationerna kan introduceras av läraren själv, via läromedel, med hjälp av elevernas förståelse eller på annat sätt. Hela variationsrymden blir undervisningsobjekt och beskaffenheten hos denna är betydelsefull för elevers erfarande. (a.a.) Lärandet kan också bli mer mångfacetterat när eleverna får tillfälle till reflektion över många kvalitativt olika tankesätt i en elevgrupp, bland annat genom att läraren synliggör och bemöter dem på ett adekvat sätt. Att ge förutsättningar att se förhållandet mellan olika förståelser ger då möjlighet till lärande (Claesson, 2007).

5. Metod

5.1 Studiens design

Datainsamlingen är upplagd på följande sätt:

- Inledande besök i den aktuella klassen
- Lektion 1: Problemlösningsuppgift 1, Introduktion till Problemlösningsuppgift 2
- Lektion 2: Problemlösningsuppgift 2
- Lektion 3: Problemlösningsuppgift 2
- Intervju med elev 1 (i studien kallad Simon)
- Intervju med elev 2 (i studien kallad Henrik)
- Intervju med elev 3 (i studien kallad Tim)

Studien inleddes med ett besök i klassen, då jag beskrev den planerade undersökningen, svarade på frågor och delade ut missivbrev (se Bilaga 1) till klassens alla 16 elever. I missivbrevet fanns en talong där föräldrar och elever kunde lämna positivt eller negativt svar. Veckan därpå hade ett flertal av eleverna lämnat in talonger med positiv respons. Av dessa lottade klassläraren fram tre elever som skulle vara med i undersökningen. Arbetet med eleverna inleddes med ett lektionstillfälle som innehöll en matematisk problemlösningsuppgift som övning och även introduktion av den problemlösningsuppgift som sedan skulle vara föremålet för själva studien. Denna handlade om antalet handskakningar mellan personer på en fest. Under lektion 2 och 3 arbetade vi sedan tillsammans med problemlösningsuppgift 2. Därefter gjordes uppföljande enskilda intervjuer med eleverna, då de utifrån sin dokumentation pratade med mig om hur de tänkte kring problemet.

5.2 Kvalitativ ansats

Syftet med studien är således att göra en empirisk undersökning och studera hur läraren genom sin matematiska kommunikationsförmåga ger stöd för elever att utveckla sin förmåga att kommunicera kring och lösa ett matematiskt problem. För att få svar på mina forskningsfrågor har en kvalitativ ansats valts och den kvantitativa ansatsen har valts bort. Den sistnämnda används i första hand då en stor mängd specifik data samlas in för att kunna göra beräkningar och sedan generalisera resultaten (Justesen & Mik-Meyer, 2011). Detta är inte mitt syfte, utan i min empiriska undersökning är fokus att skapa förståelse för hur matematisk kommunikation kan utvecklas. Kvalitativa undersökningar är lämpliga för att beskriva företeelser i deras sammanhang, vilket möjliggör en tolkning som ger en ökad förståelse av företeelsen (Cohen, Manion & Morrison, 2007; Justesen & Mik-Meyer, 2011). Därför har en kvalitativ ansats valts.

De metoder för datainsamling som har valts för studien för att söka svar på mina forskningsfrågor är i första hand deltagande observation och intervju. Jag har i efterhand observerat och analyserat vad som hände under lektionerna. Men eftersom jag själv är delaktig i det observerade har metoden deltagande observation kompletterats med metoden aktionsforskning (Rönnerman, 2004), där forskaren själv bidrar till strukturen i händelseförloppet. De olika metoderna kommer nu att beskrivas närmare nedan och även orsaker till att dessa valts.

5.3 Deltagande observation

Cohen et al. (2007) framhåller att den karakteristiska egenskapen för observationer i forskningsprocessen består i att forskaren samlar in data i själva händelserna i ett socialt sammanhang. Det blir möjligt att se en företeelse direkt och beroendet av andrahandskällor minskar. Förutsättningarna att få mer äkta och pålitliga data ökar jämfört med av andra förmedlade data och detta är också observationens stora styrka. Ytterligare fördelar med observation är att människor i annat fall kan beskriva en aktivitet på ett sätt som inte stämmer med verkligheten och att forskaren har ett utifrånperspektiv, utan den vardagliga erfarenheten av sammanhanget. Nackdelar kan vara att observation ofta innebär en tolkning av situationen och att forskaren genom detta kan påverka resultatet. Forskaren måste ställa sig frågan vad observationen kan visa på och inte. Han/hon måste också beakta frågan om subjektivitet. (a.a.)

En typ av observation som kan göras är att fokusera på beteenden eller kvaliteter. T.ex. kan samspel i miljöer studeras (Cohen et al., 2007), vilket skedde i föreliggande studie. I studien hade jag själv – istället för elevernas klasslärare – tre lektionstillfällen med tre elever. Cohen et al. (2007) framhåller att observation i naturliga miljöer kan vålla bekymmer eftersom forskaren egentligen inte har någon kontroll över händelserna. Det kan medföra att observationerna blir mindre användbara då det kan bli färre brukbara data, vilket kan göra det svårt att dra relevanta slutsatser. (a.a.) Detta utgör argument för att jag själv hade undervisningen och därmed kunde planera lektionerna för att möjliggöra insamling av en stor mängd data som gäller kommunikation.

Observationerna var semistrukturerade (Cohen et al., 2007), dvs. det planerades vad som skulle behandlas och studeras, men vilka data som framkom berodde även av händelseutvecklingen. Cohen et al. beskriver att en semistrukturerad observation granskar erhållna data innan företeelsen som observerats förklaras och detta menar jag skedde i studien.

Deltagande observation kombineras ofta med någon annan metod för datainsamling för att även få de studerades synvinkel på det observerade. Exempelvis är det inte möjligt att förstå bakomliggande tankar eller avsikter hos de studerade genom observation. Av denna anledning förordas triangulering, det vill säga en kombination av flera metoder för att möjliggöra mer tillförlitliga resultat. (Cohen et al., 2007; Justesen & Mik-Meyer, 2011) Triangulering användes därför i föreliggande studie genom att deltagande observation, intervju och aktionsforskning sammanlänkades.

Att genom deltagande observera kommunikation och hur den utvecklas och sedan tolka skeenden för att kunna formulera ytterligare utveckling är ett förståelseinriktat förhållningssätt. Detta kan ge mer kunskap om hur kommunikation kan förbättra lärandet i ett socialt sammanhang. Hur lärande kan ske i ett socialt sammanhang är ju också fokus för valda perspektiv och teorier, dvs. det sociokulturella perspektivet och variationsteorin. Dessa har flera beröringspunkter med fenomenologin och Justesen och Mik-Meyer (2011) framhåller om den sistnämnda att den är ett perspektiv som lämpar sig mycket bra för metoden deltagande observation.

5.4 Intervju

I denna studie har således en kombination av deltagande observation, intervju och aktionsforskning valts. Den andra metoden som använts består av intervjuer och dessa har gjorts med alla de tre medverkande eleverna. Intervjuerna utgör ett viktigt komplement till den deltagande observationen. De ger möjlighet att få reda på elevernas bakomliggande tankar och deras uppfattningar av lektionstillfällena (Cohen et al., 2007). En intervju är starkt sammankopplad med sammanhanget där den görs. Den blir ett möte där ett utbyte av meningar sker mellan två människor (eller fler). Intersubjektiviteten i intervjun blir således väsentlig och kunskapen fördjupas i samtalet. (Kvale & Brinkmann, 2009)

Kvale och Brinkmann (2009) poängterar att hur en intervju skall läggas upp beror på studiens syfte och ämne. Frågorna *varför* och *vad* måste behandlas innan frågan *hur* kan ställas på ett ändamålsenligt sätt. Jag ville ta reda på hur eleverna uppfattade kommunikationen och matematiken vid lektionstillfällena för att kunna utveckla kommunikationen. Därför gjordes semistrukturerade intervjuer, dvs. utgångspunkten var en intervjuguide med teman och flera öppna huvudfrågor och med en flexibilitet för fler frågeställningar om någon av parterna skulle vilja ta upp något mer (Justesen & Mik-Meyer, 2011). Dessa kan jämföras med och kopplas till de semistrukturerade observationer som valdes för studien, enligt ovan. Båda metoderna är öppna för vad händelseutvecklingen i det sociala mötet ger.

Tekniken att intervjua kräver övning och att intervjua barn kräver en del särskilda insikter. Eleverna intervjuades en i taget för att få fram enskilda, personliga uppfattningar. Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) för fram att det är väsentligt att följa upp barns svar och försöka få dem att utveckla sina tankar. Det är därför viktigt att ha följdfrågor i beredskap, som t.ex. ”Berätta mera…” och ”Du menar alltså att…?”. Det ger en fördjupad förståelse, men kan också undvika missförstånd. Det är även väsentligt att inte ställa ledande frågor, att inte ha för bråttom, att inte lägga orden i munnen på barnet utan att vänta på svaret. (a.a.) Ett råd till intervjuaren är att ställa kontrollfrågor som ger besked om ett svar uppfattats rätt. Det ger möjlighet att validera tolkningar redan under intervjun. (Cohen et al., 2007; Kvale & Brinkmann, 2009)

Cohen et al. (2007) framhåller att intervjun är ett flexibelt instrument för datainsamling och också ett kraftfullt verktyg för forskare. Å andra sidan bör forskaren vara medveten om att intervjuaren kan vara partisk och att det kan vara en obekväm situation för den intervjuade. Intervjuer kan i övrigt innehålla en rad mänskliga moment, såsom ömsesidigt förtroende eller inte eller osäkerhet hos den intervjuade om frågeställningarna blir för djupa. (a.a.)

Eftersom intervju som metod har en del gemensamt med frågeformulär som fylls i på egen hand av informanten jämförs de båda ofta med varandra (Cohen et al., 2007). Fördelar med frågeformulär är att människor vid anonymitet är ärliga i större utsträckning och därmed kan svaren bli mer tillförlitliga. Fördelar med intervju däremot är att missförstånd och förtydliganden kan klaras ut vid intervjun och att fylligare svar och ett större djup kan fås, bl.a. eftersom en intervju ofta ges längre tid. Den direkta interaktionen i intervjun kan sammantaget alltså vara både till för- och nackdel. (a.a.) För studien föredrogs intervju framför t.ex. ovanstående typ av frågeformulär, eftersom det då blev möjligt att få en djupare beskrivning av elevernas uppfattningar och att ställa följdfrågor efter behov.

5.5 Aktionsforskning

Min studie har även inspirerats av aktionsforskning. Rönnerman (2004) beskriver aktionsforskning som en ansats som utgår från praktiken och som används i verksamhetsutveckling. Den innebär ett samarbete mellan forskare och praktiker och möjliggör forskning som resulterar i förändringar som bedöms behövas. Förhållandet mellan tänkande i praktiken och handlande i praktiken poängteras. Efter att ha ringat in en frågeställning följer förändrat agerande i verksamheten, förloppet följs och reflektion sker. Förändringarna genomförs med ett fördjupat synsätt i och med föreningen av teori och praktik. Praktikern – t.ex. läraren på en skola – blir således delaktig i förändringsprocessen och kan vara med och skapa bättre förhållanden. Utvecklingen av kunskap blir både individuell och kollektiv. (a.a.) Synsättet att läraren är med i själva skeendet kan vara positivt för förändringen. Min studie gjordes på den skola där jag under lärarutbildningen gjort den verksamhetsförlagda utbildningen, VFU, och det gör att skolan är välbekant för mig. Att utveckla kommunikationen i matematik kan vara en tänkbar fråga i ett aktionsforskningssammanhang, menar jag.

Rönnerman (2004) redogör vidare för verktyg som används i aktionsforskning – ett av dessa utgörs av observationer. Verktyget innebär att studier sker av vad som händer i praktiken, främst genom observationer av olika skeenden och intervjuer eller kombinationer av dessa. Att filma situationer kan då bli aktuellt. Med hjälp av verktygen kan fokus riktas mot någon speciell företeelse som sedan analyseras. Det blir en bra bas för vidare åtgärder och möjligheten för varaktiga förändringar ökar. (a.a.) Arbets- och tankesättet stämmer väl överens med hur min undersökning utfördes och detta är ytterligare ett argument till varför metoden kan vara en utgångspunkt för studien.

Aktionsforskning är ett begrepp som används i många sammanhang och på vissa sätt skiljer den sig från ideal forskning (Berlin, 2004). Under ideala omständigheter skall forskaren vara opartisk och kunna reflektera kritiskt. Det är inte alltid möjligt i aktionsforskning på grund av närheten till praktiken, där forskaren är involverad i en förändringsprocess och kan föreslå exempelvis förbättringar. Data skall i forskning samlas in enligt speciella procedurer och undersökningar bör vara reproducerbara, vilket kan vara svårt att åstadkomma i aktionsforskning. (a.a.)

5.6 Urval och avgränsningar

Studiens data består av tre filmade undervisningstillfällen med tre elever och tre filmade enskilda intervjuer med eleverna. Eleverna går i år 3 på en F-7-skola i en mellanstor kommun i Västra Götaland. Elever från år 3 valdes eftersom min utbildning i första hand inriktar sig mot åldrarna 6 -10 år och det då bedömdes vara en fördel att välja elever i en årskurs där de kommit en bit på väg i matematiken. De är alla pojkar och har i studien avidentifierats och tilldelats fingerade namn – Simon, Henrik och Tim – för anonymitetens skull. Min VFU-skola valdes för studien eftersom jag där känner till lärare, elever och även lokaler sedan tidigare. Missivbrev delades ut till alla klassens 16 elever och majoriteten gav positiva svar på en tillhörande talong. Klassläraren fick i uppdrag att från dem lotta fram ett urval på tre elever som skulle vara med i studien. Av den anledningen skedde ingen påverkan av vilka elever som skulle vara med, t.ex. togs inte genusfrågan upp. Just tre elever bedömdes vara lagom om alla skulle få riklig uppmärksamhet under lektionstillfällena och att det skulle gå att filma på ett välfungerande sätt. Därefter ingick dessa tre elever i studien vid alla undervisningstillfällena. Detta gav en fördjupad inblick i några elevers kommunikation i matematik, eftersom de kunde följas i en problemlösningsprocess över tid. Begreppet kommunikationsförmåga har en väsentlig vidd i sin tillämpbarhet. Tre elever lottades således fram och blev föremål för studien. Resultaten kan sedan överföras till en större grupp, som exempelvis en klass med 25 elever. Det finns här en fullständig medvetenhet om att vissa skillnader mellan gruppstorlekar existerar, men likheterna vad gäller funktionen av kommunikationsförmågan överväger starkt. Det föreligger en väsentlig nytta av resultaten och erfarenheterna från studien även i ett större sammanhang med en hel klass.

5.7 Datainsamling och analys

Alla undervisningstillfällen ägde rum i ett avskilt, ostört rum och strävan var att efterlikna en vanlig lektion så långt som möjligt för att det skulle utgöra en realistisk situation. Det första tillfället sågs som ett övningstillfälle för att eleverna och jag skulle bekanta oss med varandra och för att testa filmutrustningen. Vid detta tillfälle introducerades även den problemlösningsuppgift som sedan skulle vara föremål för själva studien. Filmkameran stod vid alla lektions- och intervjutillfällen på inspelning utan avbrott i ett hörn av rummet, så att så lite notis som möjligt skulle ägnas den. Vid det andra lektionstillfället började själva problemlösningen och vi funderade tillsammans på olika lösningsmetoder, vilka sedan följdes upp vid det tredje tillfället. Lektionernas längd var mellan 29 och 43 minuter. Vid tillfället därefter påbörjades intervjuer och även dessa hölls i avskilda, ostörda rum. De enskilda intervjuerna med eleverna varade mellan 27 och 34 minuter. En elevintervjuguide utgjorde underlag för samtalet (se Bilaga 2).

Alla lektioner med elever filmades således i sin helhet. Det var ändamålsenligt då tiden för uppsatsen var begränsad och det var nödvändigt att få ut så många data som möjligt från varje tillfälle. Filmerna gjorde det möjligt att observera kommunikationssituationerna även efteråt och upptäcka nya företeelser i dem efter hand. Justesen och Mik-Meyer (2011) menar att en student inte har så lång tid att tillgå för sin uppsats och då är det viktigt att göra observationen mycket fokuserad och förhållandevis strukturerad. Strävan var att uppnå strukturen genom att jag noggrant förberedde varje lektionstillfälle för att kunna studera kommunikation på ett så välfungerande sätt som möjligt. Jag utvärderade även varje tillfälle i efterhand för att se vad som kunde förbättras till nästa gång. Fokuseringen menar jag uppnåddes genom filmningen. Cohen et al. (2007) framhåller att ett gott råd är att filma ett observationstillfälle för att samla in data därifrån. Detta kan minska partiskheten hos observatören och medger även att mindre frekventa händelser kan upptäckas. Selektiviteten i observationerna kan minska, förståelsen för materialet kan öka och analysen kan bli mer komplett.(a.a.)

Även intervjuerna med eleverna filmades, vilket således ger mer information än om endast ljudupptagning hade gjorts. Cohen et al. (2007) framhåller att filmade skeenden på ett videoband ger mer exakta data, men att filmningen kan göra att den intervjuade känner sig begränsad och lite övervakad i en sådan situation. Eleverna var dock vana vid att bli filmade efter de tre lektionerna vi haft och verkade inte ta så stor notis om att filmkameran stod på inspelning. Det är en fördel att intervjuerna filmats, främst eftersom eleven och jag i respektive intervju pratar om lektionstillfällena med hjälp av hans dokumentation och att detta då synliggörs tydligt på filmerna.

Delar av lektionerna och intervjuerna skrevs ned, men transkribering i sin fullständiga betydelse gjordes således inte. Cohen et al. (2007) framhåller att ett problem med transkribering av intervjuer – utan kompletterande kommentarer – många gånger kan vara att den enbart blir en uppteckning av data snarare än en uppteckning av ett socialt möte som en intervju är. Författarna menar vidare att det inte finns en enda slags transkribering som är lämplig i alla situationer. Hur en sådan kan komma till användning i en studie är det väsentliga. En transkribering är ”frusen” och har inte den dynamik som intervjun hade då den genomfördes. (a.a.)

Direkt efter varje filmat undervisningstillfälle tittade jag igenom materialet och förde kontinuerligt anteckningar över hur händelseförloppet utvecklade sig. Jag gjorde också egna reflektionsanteckningar över vad som hände. Därefter studerades materialet noggrant igen och intressanta sekvenser antecknades där olika aspekter av kommunikation och dess utveckling var framträdande och som sedan kunde sättas i relation till studiens syfte och frågeställningar. Dessa avsnitt specialstuderades genom att jag transkriberade dem och tittade på dem flera gånger med var och en av eleverna som utgångspunkt. Cohen et al. (2007) framhåller att det är väsentligt att observera och reflektera över både små och stora ”avsnitt” i studerade beteenden. De små delarna ger specifik information och de större delarna ger ett sammanhang och en helhet. Forskaren skall vinnlägga sig om att välja ”avsnitten” så att de på ett giltigt sätt fokuserar de aktuella frågeställningarna. (a.a.) Detta har beaktats vid framtagande av resultat och vid analys. Filmerna från elevintervjuerna studerades på motsvarande sätt och fokus lades på de avsnitt där frågan om kommunikation i matematik framträdde tydligt.

Cohen et al. (2007) beskriver hur kvalitativ forskning genererar en stor mängd data och att det är viktigt att styra in fokus på framträdande drag i materialet, från ett vitt seende till ett mer koncentrerat. De för vidare fram att det finns olika sätt att organisera och presentera en dataanalys; utifrån människor, frågor eller forskningsmetoder. Ett sätt att göra det utifrån en fråga kan vara att använda forskningsfrågan. Cohen et al. menar att det är ett mycket användbart sätt när data skall organiseras, eftersom det då koncentreras på specifikt för forskningsfrågan viktiga data och att även sammanhanget i stoffet bibehålls. Det kan också bli ett konsekvent arbete genom att det som från början var utgångspunkten fokuseras. Detta arbetsätt innebär alltså att all väsentlig data från de olika metoder som använts i en studie sammanställs till en helhet för att besvara forskningsfrågan. (a.a.) I studien har forskningsfrågorna använts på detta sätt för att organisera data och göra en analys. Även Justesen och Mik-Meyer (2011) beskriver ett tolkande arbetssätt vid analysarbete, som inte innebär en systematisering utifrån teman eller kategorier, utan som istället är styrd av frågeställningarna.

Cohen et al. (2007) menar att dataanalys är en interaktion mellan forskaren och de enskilda, redan av henne/honom tolkade delarna i materialet. Forskaren bör vara starkt medveten om tolkningens relativt stora roll vid analys av kvalitativa data och Cohen et al. poängterar begreppet reflexivitet som ett viktigt inslag i detta arbete. Begreppet har sin grund i att forskaren påverkar insamlade data genom sina egna uppfattningar, intressen och sin egen bakgrund. Därför krävs genom reflexivitet stor försiktighet och självmedvetenhet av denne vid analys av kvalitativa data för att erhålla så stor objektivitet som möjligt.

5.8 Etiska ställningstaganden

Hänsyn har tagits till de forskningsetiska principer som Vetenskapsrådet (2002) förordar och de fyra huvudkrav som ingår där; informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Detta innebär att jag först besökte den aktuella klassen för att berätta för eleverna och självfallet även för läraren om studien och vad den skulle innebära. Då delades också ett missivbrev ut (Bilaga 1) där jag för vårdnadshavare och elever berättade vem jag är och utifrån syftet beskrev den planerade studien och att några elever skulle lottas fram för lektioner och intervjuer. Hur det filmade materialet skulle användas och att det efter arbetets slutförande skulle förstöras beskrevs också. Vidare redogjordes i brevet för att samtliga elever, läraren och skolan skulle komma att avidentifieras och att vårdnadshavare eller elev när som helst kunde avbryta elevens deltagande i studien. Förutsättningen för en elevs medverkan var dels att han/hon själv och dels att vårdnadshavaren samtyckte. Läraren frågade därför eleverna om detta inför lottningen och det utdelade brevet åtföljdes av en talong där vårdnadshavaren skulle fylla i om dennes barn fick vara med i studien eller inte. Jag skrev också mitt telefonnummer i brevet och välkomnade vårdnadshavarna att ringa vid frågor. Allt material som genererades skulle endast användas i min studie och inte i något annat sammanhang. Materialet förvarades under arbetets gång på ett betryggande sätt, så att ingen obehörig skulle kunna ta del av det.

5.9 Validitet, reliabilitet och generaliserbarhet

5.9.1 Validitet

Cohen et al. (2007) framhåller att validitet – det vill säga giltighet – är mycket väsentlig i effektiv forskning då forskningsresultat som i motsats till detta är ogiltiga heller inte är värda något. Begreppet validitet har på senare tid kommit att omdefinieras. Från att ha inneburit att ett instrument mäter vad det är tänkt att mäta har andra betydelser lagts in. Exempelvis kan för en kvalitativ studie validitet nu omfatta mer av ärlighet, djup, riklighet och vidd hos insamlade data, om triangulering använts och graden av omsorgsfullhet och objektivitet hos forskaren. (a.a.) Silverman (2001, & Bitsch Olsen & Pedersen, 2003, refererade i Justesen & Mik-Meyer, 2011, s. 34) framför härutöver att validitet kan stå för i vilken grad som definitioner av begrepp för de analyserade företeelserna gör rättvisa åt insamlade data. Gronlund (1981, refererad i Cohen et al., 2007, s. 133) framhåller att i kvalitativa studier medför respondenters subjektivitet och deras åsikter och attityder en viss grad av skevhet. Därför är ambitionen att se graden av validitet istället för ett enda absolut förhållande (a.a.). Målet blir därmed att i en studie erhålla så hög validitet som det är möjligt.

Hur har då validiteten beaktats i min studie? Triangulering kan således öka denna och i studien har metoderna deltagande observation, intervju och aktionsforskning sammanlänkats och företeelserna studeras härigenom från flera olika perspektiv. Min strävan har även varit att samla in data med djup, riklighet och vidd, enligt ovan, för att utifrån detta kunna välja ut aspekter som uppfyller mitt syfte och besvarar mina frågeställningar. Jag har också varit så omsorgsfull som möjligt i val av begreppsdefinitioner och i analys. Genomgående i analysen har intentionen funnits att vara reflexiv och objektiv så långt som möjligt. Hela detta arbetssätt sammantaget har gett goda förutsättningar för att studien skall bli valid, menar jag.

5.9.2 Reliabilitet

Reliabilitet innebär tillförlitlighet, det vill säga i vilken utsträckning en studies metoder är så noggrant definierade att någon annan skulle kunna erhålla samma resultat om han/hon gjorde om undersökningen (Justesen & Mik-Meyer, 2011). Cohen et al. (2007) beskriver hur begreppet har sitt ursprung i kvantitativa studier och att det i kvalitativa studier är omstritt. Vidare förs fram att det är svårt för två olika forskare att samla in identiska kvalitativa data från en och samma händelse, men fynden hos de båda kan ändå ha reliabilitet. Här menar Cohen et al. att ett behov av triangulering av metoder kan skönjas. Justesen och Mik-Meyer lyfter fram att i en kvalitativ studie befinner sig objektet för forskningen alltid i en kontext som även innefattar exempelvis perspektiv hos forskaren och val av teorier. Därför bör forskaren beakta betydelsefulla omständigheter specifika för kontexten, således just för den aktuella studien särskilda omständigheter som inte är reproducerbara (a.a.).

Det är en uppenbar styrka hos kvalitativa studier att de är specifikt unika och inte möjliga att kopiera. Men å andra sidan finns ambitioner att efterlikna frambringande, förfining och jämförelser av resultat. (Cohen et al., 2007) LeCompte och Preissle (1993, refererade i Cohen et al., 2007, s. 148) hävdar att denna typ av kopiering kan ske i val av respondenter, sociala förutsättningar, datainsamlingsmetoder och analysmodeller. På detta vis säkerställs en slags reliabilitet i använda metoder och arbetssätt.

Cohen et al. (2007) behandlar vidare att i kvalitativa studier är avsikten att få en djupare förståelse för vad som är meningsfullt för respondenten i det verkliga livet. Brock-Utne (1996, refererad i Cohen et al., 2007, s. 149) framhåller att dessas karaktärsdrag är att registrera olika avsikter och meningar som finns inbäddade i företeelser. Här tolkas samtidigt begreppet reliabilitet som *pålitlighet*, som inkluderar validering av respondent, diskussion med kollegor, triangulering, återkommande observationer och efterföljande granskning. Detta för att få data att så långt som möjligt överensstämma med erhållna resultat.

I min studie har strävan varit att åstadkomma reliabilitet genom ett noggrant val av respondentgrupp (varifrån ett urval lottades), datainsamlingsmetoder och modell för analys. Triangulering har beaktats genom att tre olika metoder använts för undersökningen. I de enskilda intervjuerna med de tre eleverna var en ambition att inte ställa ledande frågor. Min intention var även att validera respondenternas svar redan under intervjuerna genom att be dem utveckla och förtydliga sina uttalanden. Jag gjorde också flera deltagande observationer och granskade erhållna data och resultat åtskilliga gånger. Detta möjliggjordes bland annat av att allt det insamlade materialet fanns filmat. I uppsatsen har också tillvägagångssättet för studien beskrivits så exakt som det var görligt och avsikten har varit att redogöra för de överväganden som gjorts under arbetets gång. I övrigt har min strävan för att nå en så hög reliabilitet som möjligt omfattat att vara kritisk i sammanställning av resultat och i analysprocessen och att noggrant uttryckligen beskriva varje skede även i dessa processer.

5.9.3 Generaliserbarhet

Begreppet generaliserbarhet används i huvudsak i kvantitativa studier vid en stor mängd insamlad data, där resultaten bedöms vara representativa för en större population (Justesen & Mik-Meyer, 2011). I kvalitativ forskning är urvalet av personer inte representativt i statistisk betydelse, vilket gör att resultaten inte omfattas av statistisk generaliserbarhet (a.a.). Däremot används ofta istället ett annat liknande begrepp; *analytisk generaliserbarhet* (Kvale, 1997). Kvale beskriver detta som en reflexiv bedömning av om en studies resultat kan vara vägledande för andra, liknande händelser och företeelser. Min studie är inte statistiskt, men dock analytiskt generaliserbar genom att resultaten kan vara vägledande för andra, liknande fall. Resultaten om kommunikationsförmåga kan överföras till andra elevgrupper – både mindre grupper och även till ett större sammanhang med en hel klass.

6. Resultat och analys

6.1 Introducering av det matematiska problemet

För att få så gynnsamma förhållanden som möjligt för den kommande undervisningen med eleverna gjordes förberedelser genom att vid det första undervisningstillfället enbart introducera problemlösningsuppgiften som skulle vara fokus för studien. Eleverna och jag läste då tillsammans igenom uppgiften vi skulle utgå ifrån. Den är formulerad på följande sätt:

6.1.1 Skaka hand

Tänk dig att din klass har fest och att alla minglar och hälsar artigt på varandra genom att skaka hand. Alla skakar hand med alla.

1. Hur många personer är det på festen?
2. Hur många personer har var och en på festen tagit i hand?
3. Hur många handskakningar har alla på festen gjort tillsammans?
4. Hur många handskakningar blir det sammanlagt om det är sex personer på festen?
5. Hur många handskakningar blir det sammanlagt om det är 16 personer på festen?
6. Kan du se ett mönster för hur många handskakningar det blir totalt när antalet personer ökar?

Vi pratade därefter om kontexten i verkligheten. Ytterligare förberedelser för problemlösningen gjordes genom att de ombads att om de hade tid gärna fundera lite över uppgiften hemma tills nästa gång vi skulle träffas. Vid det andra tillfället läste vi tillsammans uppgiften igen och arbetade då vidare med hur den kunde lösas. Även detta tillfälle avslutades med en uppmaning till eleverna att gärna fundera lite över problemet hemma. Vid det tredje och avslutande lektionstillfället kunde vi tillsammans upptäcka ett mönster och utifrån det ett samband för handskakningarna.

Ett väl fungerande sätt att arbeta med problemlösning är att dela upp den i följande faser:
1. Orientering om och förståelse av problemet
2. Göra en plan – Välja lösningsstrategi
3. Genomförande av planen – Att utföra beräkningarna
4. Tillbakablick
5. Generaliseringar
(Pólya, 2003; Hagland et al., 2005)

I studien användes de fyra första av dessa faser. Den femte bedömdes ligga på en alltför hög nivå för elever i år 3.

Ett problem kan lösas med olika slags strategier och i diskussionerna i undervisningen användes följande:
- Leta efter ett mönster
- Gör en tabell (lista)
- Undersök ett enklare fall
- Rita en figur
- Dramatisera och/eller använd laborativa materiel
(Pólya, 2003; Hagland et al., 2005)

För att uppnå en utvecklad förståelse är det väsentligt att vid lösning av ett matematiskt problem använda flera olika strategier för att få många infallsvinklar på uppgiften. Skolverket (2011) framhåller att genom kommunikation av ett matematiskt stoff med hjälp av olika uttrycksformer vidgar och fördjupar eleverna sin förståelse av begrepp och förbättrar även sin kapacitet att generalisera, analysera och komma fram till slutsatser.

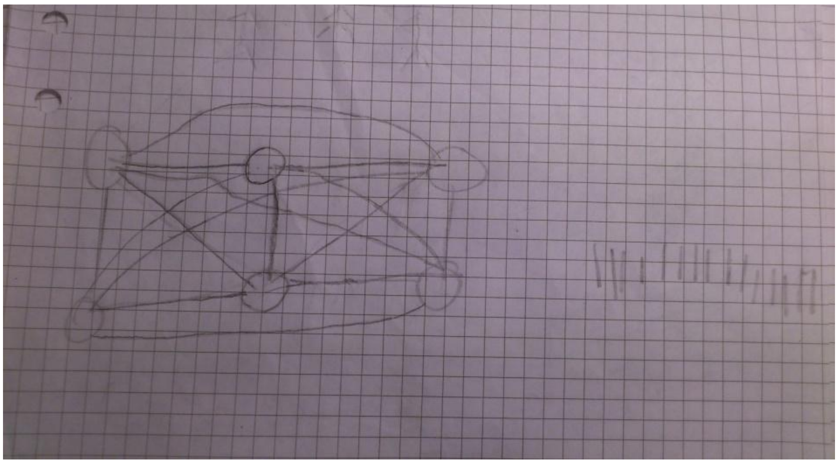
Jag har valt att ur det filmade materialet från lektionstillfällena välja och analysera två avsnitt, som är kritiska genom att de tydligt synliggör funktionen av kommunikation. I det första avsnittet undersöker vi mönster med hjälp av en bild. Då pratar en elev och jag förbi varandra, vilket leder till att jag missar ett väsentligt sätt att lösa uppgiften och detta vidareutvecklas inte. Avsnittet innehåller dock även utvecklande kommunikation i form av att vi trots detta tillsammans arbetar mot en lösning med hjälp av en figur. I det andra avsnittet undersöker vi mönster med hjälp av en tabell. Här framgår att det kan vara svårt för elever att för andra elever förklara hur de tänker, även om de själva har förstått och löst uppgiften. Lärarens roll kan då vara betydelsefull för att nå en lite djupare kommunikation i en grupp och möjliggöra utveckling av elevers begreppsförståelse. När jag beskriver respektive lektionsavsnitt kommer jag också att beskriva det som hänt just före och vad som hände precis efter detta för att förtydliga och sätta in avsnittet i ett sammanhang. Jag startar således med avsnitt 1 där vi utforskar mönster med hjälp av en bild.

6. 2 Avsnitt 1: Undersöka mönster med hjälp av en bild för att se ett samband

6.2.1 Beskrivning av resultat från lektionsavsnitt 1

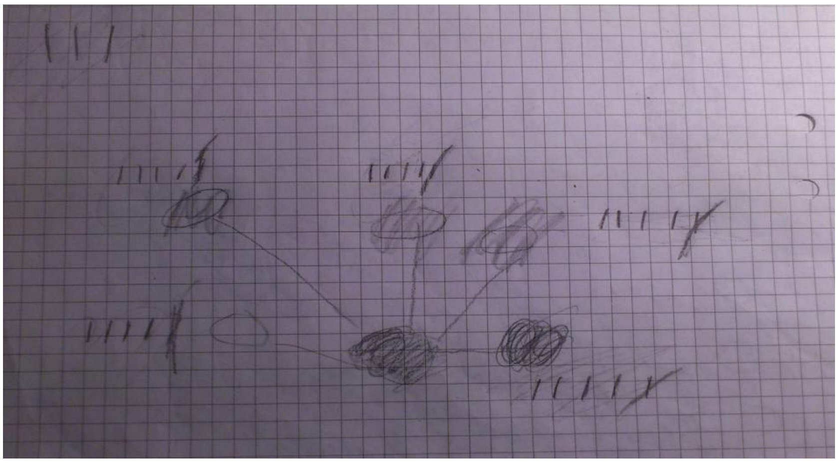
Avsnittet har tagits från det andra lektionstillfället då arbetet med uppgiften inleds. Problemet dramatiseras först genom att två av eleverna hälsar på varandra och antalet handskakningar studeras. Sedan hälsar de tre eleverna på varandra och även vi alla fyra och samtidigt adderas antalet handskakningar. Vi pratar om att det blir ”samma händelse” när två personer hälsar på varandra, varför denna då endast räknas som en handskakning. Vi gör sedan en enkel lista över antalet handskakningar för dessa antal personer och undersöker om det finns ett mönster som kan visa ett samband för vad som händer. Det är inte så lätt att se detta och därför frågar jag eleverna om de kan dokumentera hur ett mönster kan se ut när sex personer hälsar på varandra.

Det är här det studerade lektionsavsnittet startar. Eleverna talar om att skriva talet och jag menar då att ett annat sätt är att rita en figur med personerna som små cirklar. Tim anknyter då till strategin dramatisering av handskakningar som användes tidigare och föreslår att antalet som gäller för varje cirkel kan skrivas i denna. Jag säger att det är möjligt, men att ett annat sätt kan vara att rita streck som symboliserar handskakningarna mellan cirklarna och ta en cirkel i taget och Simon och Henrik börjar rita på detta sätt (se Figur 1).



Figur 1. *Figur för att beräkna antalet handskakningar mellan sex personer, gjord av Henrik.*

Tim däremot väljer ett annat sätt att starta och beskriver hur han gör. Han skriver ett streck (en ”pinne”) för varje handskakning intill varje cirkel och säger att det blir sex streck för varje person, eller fem, menar han sedan att det blir. Tim utvecklar således en annan typ av uttrycksform. Trots detta föreslår jag att alla skall rita små cirklar och dra streck emellan, eftersom jag tror att det då skall bli lättare för dem att lösa uppgiften. Men Tim fortsätter trots det med sin metod eftersom han troligen menar att han kan se det lättast på det sättet (se Figur 2).



Figur 2. *Figur för att beräkna antalet handskakningar mellan sex personer, gjord av Tim.*

Tim säger samtidigt som han med pennan ”färglägger” cirklarna (citerat från filmen Lektion 2):

- ”När jag målar den är den klar. 1,2,3,4,5… Och då stryker jag en på alla.”

- ”Hur många fick du det till, Tim?” undrar Henrik.

Tim svarar att han inte är klar, men Simon säger att han fick tio handskakningar. Henrik räknar i sin figur och får det till 13 stycken. Jag säger:

- ”Ja, fint! Det är inte dumt. Det gäller att tänka att alla hälsar en gång – så att det finns ett streck mellan alla.”

Tim låter varje cirkel – en i taget – ”hälsa” på de andra och han säger:

- ”Då kör jag den… Och hälsar på den och hälsar på den och hälsar på den och hälsar på den. Då hälsar den på fyra och då blir det ju fyra och då är den klar.… 5 + 4! 9. ...9, och nu skall den hälsa på de andra, då blir det ju 3. Då blir det ju 12.”

- ”Ja”, svarar jag och ber Simon och Henrik titta på när Tim förklarar hur han tänker och säger att vi skall se på deras figurer också sedan.

- ”Och sen den, 14, och sen den. 13??” (räknar troligen 12 + 1 istället för 14 + 1, författarens kommentar)

- ”Ja, det är jättebra, för att det minskar ju hela tiden. Allt eftersom någon hälsar så minskar det.”

- ”Det är väl 13?”

- ”Ja, det är inte riktigt rätt… Det är några till…”

Under tiden ritar Simon några streck till i sin figur.

- ”Vad? Jag kom också fram till 13”, säger Henrik.

- ”15”, säger Simon.

- ”Kom du fram till 15?” frågar Tim Simon.
(slut på citatet)

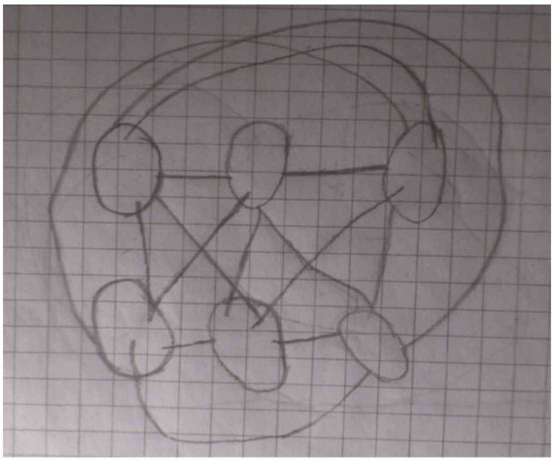
Tim räknar ut hur många handskakningar det blir för sex personer även om han inte kommer fram till riktigt rätt svar. Han dokumenterar också till viss del genom att i början av lösningen rita och skriva streck under tiden. Jag förstår då inte att det vore bra att följa upp metoden Tim använder, kanske tror jag att den är lite för svår. Istället övergår vi till att titta på hur Henrik arbetat med uppgiften genom att rita cirklar med streck emellan och jag ber honom förklara hur han har gjort. Henrik svarar (citat):

- ”Jag gjorde så. Så hälsade de. Så, så… och sen drog jag ett streck så och så drog jag runt så”, säger han. ”Så skrev jag ett streck för varje: 1,2,3….13!” (Se Figur 1).
Därefter hjälps vi åt att hitta två förbindelser till.

- ”15!” säger Tim.

- ”Jag sa ju det!” säger Simon.

Jag ber sedan Simon visa vad han har kommit fram till. Han säger att hans figur inte blev lika bra. Jag frågar om han har räknat strecken mellan cirklarna i sin figur (se Figur 3).



Figur 3. *Figur för att beräkna antalet handskakningar mellan sex personer, gjord av Simon.*

- ”Jag bara chansade på 15.”

Jag ber honom berätta hur han har tänkt.

- ”Men de två har inte hälsat”, säger Henrik och pekar i Simons figur.

- ”Egentligen så bara jag chansade på 15”, säger Simon.

Samtidigt prövar även Tim denna metod och får 15 som resultat. Han säger:

- ”Ja, det är 15. Jag kom också fram till 15.”

- ”15? Bra!” svarar jag.

- ”Vi räknar strecken”, säger jag till Simon, ”vi kan räkna tillsammans”.

- ”1,2,3,…..13, 14”, säger Simon.

Det femtonde strecket upptäcks gemensamt.

- ”Förut fick jag ihop det till 13 när de tog slut och nu lade jag till två. 15”, säger Simon. ”Jag bara gissade förut.”

- ”Ja, du gissade och det kan man ju också göra, för då kan man ju se sedan och jämföra med det man kom fram till. Vad fint! 15 handskakningar för sex personer”, säger jag.
(slut på citatet)

Här slutar det studerade lektionsavsnittet. I den senare delen av avsnittet studeras Henriks och Simons lösningar med cirklar och streck emellan och färdigställs. Även Tim prövar då denna metod och kommer fram till 15 handskakningar. Han får dock inte möjlighet att utveckla den metod han först tänkte på. Det kan ha fått till följd att Tim uppfattar det som att den av mig föreslagna metoden var bättre än den han själv prövade.

I ovanstående situation bygger Tim vidare på vårt tidigare resonemang vid dramatiseringen. Han får härutöver fram att för varje person av de sex som hälsar blir antalet handskakningar lika stort som tidigare subtraherat med ett. Detta inses lättare med hjälp av hans mer utvecklade metod att lösa uppgiften, jämfört med den metod jag föreslår att endast rita cirklar förbundna med streck. Med hjälp av den sistnämnda – utan att skriva ut talen – synliggörs endast summan av handskakningarna och inte ett mönster för vad som händer. Jag förstår inte att Tim är på väg mot en lösning med användande av en lämplig metod. Här skulle jag, vilket jag upptäcker först i efterhand, ha kunnat följa upp och ge Tim möjlighet att förklara mer noggrant hur han tänker genom att han hade fått rita och skriva och också tydligt beskriva additionen 5+4+3+2+1=15. Det som kan skönjas här är att han redan inledningsvis kommer fram till början på ett mönster för handskakningar som är fullt användbart.

Det är följande typ av mönster han har upptäckt:
6 personer hälsar => 5+4+3+2+1= 15 handskakningar,
vilket innebär att om 5 personer hälsar => 4+3+2+1= 10 handskakningar.

Henrik löser uppgiften med hjälp av sin figur och skriver streck intill för att lättare beräkna antalet handskakningar. Han får fram 13 stycken och med lite hjälp av gruppen kompletterar han till 15 (se Figur 1). Simon får med hjälp av figuren först fram tio handskakningar, arbetar vidare och når 13 och gissar sedan på 15 stycken. Med lite hjälp av oss andra kan han även med stöd av sin figur få fram 15 stycken (se Figur 3). Att gissa kan vara en hjälp vid problemlösningen och visar också vad eleven bedömer vara rimligt innan lösningen är färdig.

När alla de tre eleverna på olika sätt har kommit fram till 15 handskakningar och detta har stämts av fortsätter ytterligare arbete med uppgiften. Sex personer byts ut mot fem, men då bygger vi inte vidare på det Tim kom fram till, vilket hade varit lämpligt. För fem personer ritas cirklar förbundna med streck som tidigare och även Tim gör detta, vilket kan tyda på att han ser det som den mest användbara metoden av de två, vilket således inte är fallet.

När kommunikationsförmågan behandlas i kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) beskrivs hur eleverna bör få möjlighet att utväxla information med varandra och läraren om matematiska tankegångar genom att tala, skriva och genom att använda olika uttrycksformer. Ett exempel på detta kan vara att en elev dokumenterar i skrift genom att göra en figur och med denna uttrycksform som grund kommunicerar muntligt om en uppgift. Om Tim i den beskrivna situationen hade fått välja den mer utvecklade metod med figur han först tänkte på och ansåg vara en logisk följd av det tidigare, hade han kunnat rita och skriva och sedan muntligt kommunicera sina tankar vidare. Det hade sannolikt inte uppfattats som för svårt av Simon och Henrik. I ett sådant samtal hade kommunikationen i gruppen kunnat utvecklas och fördjupas och förståelsen hade kunnat öka hos alla de tre eleverna. Dessutom hade mönstret som eftersöktes kunnat upptäckas tidigare. Istället för att bara fortsätta att rita olika figurer hade också samtidigt en komplettering med aritmetiska summor (såsom 5+4+3+2+1=15) kunnat göras. Våra resonemang i avsnittet får även till följd att vid det tredje lektionstillfället får en nystart i tänkandet ske när figurerna skall ritas lite finare med linjal. Vi skriver sedan in antal handskakningar i en tabell och denna hade vid sidan kunnat kompletteras med aritmetiska summor för varje antal för att tydliggöra. De aritmetiska talföljder som uttrycks vid lektionstillfället är de som räknas ut som skillnader mellan antalet handskakningar i tabellen – att det skiljer 1, 2, 3, 4, 5… handskakningar för varje person som tillkommer, vilket jag visar eleverna nedskrivet. Vid detta tredje lektionstillfälle verkar alla de tre eleverna trots allt upptäcka och se mönstret och utifrån det också sambandet som råder.

6.2.2 Sammanfattning av resultat från lektionsavsnitt 1

Det valda lektionsavsnittet föregås av att eleverna och jag dokumenterar genom att skriva en enkel lista över antalet handskakningar för två, tre och fyra personer som vid dramatiseringen. I själva avsnittet ritar vi sedan en figur över hur antalet handskakningar ser ut för sex personer. Simon och Henrik ritar då små cirklar med streck emellan som jag föreslår. Tim använder en mer utvecklad metod och kommer med hjälp av sin figur fram till den aritmetiska summan 5+4+3+2+1=15 handskakningar, även om han inte gör beräkningen korrekt. Han bygger således vidare på det tidigare resonemanget vid dramatiseringen. Jag uppfattar inte att detta kan vara en lämplig metod och ger inte Tim möjlighet att utveckla och skriva hur han tänker och tydligt beskriva additionen han kommer fram till. Han kommer således redan inledningsvis fram till början på ett funktionellt mönster. Istället fortsätter arbetet enligt den av mig föreslagna metoden och Henrik och Simon får med hjälp av sina figurer beskriva sina streck mellan cirklarna och hur de tänker. Henrik har för att tydliggöra antalet skrivit streck motsvarande dessa. Då går även Tim över till denna metod och får som resultat 15 handskakningar. Efter det valda avsnittet byts sedan sex personer som hälsar ut mot fem personer och alla använder då den tidigare använda metoden för att rita en figur. Vid det tredje lektionstillfället upptäcks mönstret och alla elever verkar då se detta och utifrån det sambandet för antal handskakningar med ökat antal personer. Den matematiska kommunikationen i gruppen hade kunnat utvecklas och fördjupas markant om jag hade beaktat Tims förbättrade metod i det valda lektionsavsnittet.

6.2.3 Intervju med Simon

I den enskilda intervjun med Simon kan han förklara vad som gjordes vid undervisningstillfällena, men inte beskriva så detaljerat hur mönstret som upptäcktes ser ut. Men han visar att han har förstått att skillnaden mellan antalet handskakningar ökar med samma antal adderat med ett för varje person som tillkommer. När jag frågar om han tycker att han kan berätta och beskriva hur han tänker i matematik med hjälp av det han har ritat och skrivit svarar han att han kan berätta, men han är inte så bra på att beskriva.

På frågan vad han tycker att han har lärt sig för någonting nytt i matematik vid problemlösningstillfällena svarar han att det inte är så värst mycket och han har svårt att nämna något. När samtalet gäller vad som övats i matematik nämner han bland annat att rita.

Han anser att det var ganska bra att prata matematik så som skedde i gruppen. Ibland har han vid problemlösningen inte förstått vad som menas, när nya saker har introducerats. Han säger att både han och Henrik då först haft svårt att förstå.

6.2.4 Intervju med Henrik

I intervjun med Henrik kan även han förklara vad som gjordes vid lektionstillfällena, men inte beskriva mönstret riktigt i detalj. Men även han visar att han har förstått att skillnaden mellan antalet handskakningar för varje person som tillkommer ökar med samma antal adderat med ett. Han tycker att han kan berätta och beskriva hur han tänker i matematik med hjälp av det han har ritat och skrivit.

Henrik menar att något nytt han lärt sig i matematik i uppgiften är att skriva en tabell på det sätt som vi gjorde, att se ett mönster och att man kan skriva skillnaderna bredvid i tabellen. Han säger också att han kanske har lärt sig lite multiplikation.

Henrik tycker att det var kul att prata matematik så som gjordes i gruppen. Han anser att det var roligt att det varje gång var olika saker som skulle göras och att de fick lära sig lite också. Han säger senare att det är roligt att i ett problem kunna välja olika sätt att arbeta. Att fundera kring en problemlösningsuppgift under lite längre tid tycker han är roligt, om han får fundera lite mellan tillfällena. Det fungerade bra att förklara för varandra i gruppen, tycker han. Men, tillägger han, det skulle ha varit lite längre betänketid vid en fråga innan någon fick svara.

6.2.5 Intervju med Tim

I intervjun med Tim kan också han förklara vad som gjordes vid undervisningstillfällena. Han ser, enligt ett visst mönster, skillnader i tabellen mellan antalet handskakningar för varje person som tillkommer, även om han inte kan beskriva det riktigt i detalj. Han beskriver också att olika sätt användes för att lösa problemet, exempelvis studerades skillnader i tabellen på olika sätt. När jag frågar honom om han tycker att han kan berätta och beskriva hur han tänker i matematik med hjälp av det han har ritat och skrivit säger han att det tycker han. Han säger också:

”Det är svårt att beskriva hur man tänker, men om man gör en stund lite på det, då listar jag ut det.”
(citat från intervju med Tim)

Något nytt i matematik han menar att han lärt sig vid problemlösningstillfällena är att tänka efter noggrannare vilka andra lösningssätt det finns. Han tycker att det har varit bra att prata matematik så som gjordes i gruppen; att göra det tillsammans och att alla räknar ut det till sist. Han menar även att det har varit lagom betänketid i de olika momenten.

Vid intervjun har jag bland annat med mig det lösningssätt med aritmetiska summor som Tim själv kom in på vid lektionstillfället (5 personer hälsar => 4+3+2+1=10 handskakningar och 6 personer hälsar => 5+4+3+2+1= 15 handskakningar, se Tabell 1). När intervjun är avslutad upptäcker Tim lösningen och undrar vad det är. Han förstår då genast hur mönstret för lösningen är uppbyggd. Han tillägger också att om det är sju personer som han ser på sitt papper att det blir 21 (finns inte med i uppställningen på mitt papper, citat):

- ”Då blir det ju 1+2+3+4+5+**6**”.

Tabell 1. *Antal personer och beräknat antal handskakningar uttryckta som aritmetiska summor.*

Antal personer	Antal handskakningar
1	0
2	1
3	3 = **1 + 2**
4	6 = **1 + 2 + 3**
5	10 = **1 + 2 + 3 + 4**
6	15 = **1 + 2 + 3 + 4 + 5**

6.2.6 Sammanfattning av resultat från de tre intervjuerna

Alla de tre eleverna förklarar vad vi gjort vid lektionstillfällena och de beskriver mönstret vi upptäckte, men inte riktigt i detalj. Generellt i gruppen anser sig eleverna kunna berätta och beskriva hur de tänker i matematik med hjälp av det de har dokumenterat (dvs. ritat och skrivit). De ser det troligen som att de kan berätta och beskriva lite allmänt. Berätta och beskriva tankar om matematiken har de inte kommit så långt i ännu, menar jag. Detta kräver övning och eleverna är relativt unga och går bara i år 3.

Eleverna har lite olika syn på om de lärt sig något nytt i matematik vid problemlösningen. Simon har svårt att nämna något, Henrik säger att han lärt sig att skriva en tabell på det sätt som gjordes, att se ett mönster och kanske lite multiplikation. Tim menar att han lärt sig att tänka efter noggrannare vilka andra lösningssätt det finns. I grundskolans tidigare år kan det krävas att läraren gemensamt med eleven tittar på en kontinuerlig dokumentation av arbetsprocessen för att synliggöra för eleven hur hans/hennes utveckling varit.

Eleverna menar att det har gått bra att prata matematik i gruppen. De ligger på lite olika nivå i matematik, vilket gör att Simon och Henrik menar att det ibland har gått för fort medan Tim tycker att det har varit lagom betänketid i de olika momenten.

Tim återvänder ännu en gång till den metod han använde i det utvalda lektionsavsnittet och det visar att den ligger nära till för honom. Att ta med den vid arbete med problemet hade kunnat ge möjlighet att i gruppen utveckla kommunikationen och problemlösningen över huvud taget väsentligt. Genomgående i intervjuerna är det så att eleverna sannolikt skulle ha kunnat visa en större förståelse för mönstret om den aritmetiska summan hade tagits upp och redovisats för varje ny person som tillkommer i tabellen vid handskakningarna.

6.2.7 Analys av resultat

Kommunikation är ett centralt begrepp i det sociokulturella perspektivet på lärande och utgör ett verktyg för att analysera erhållna resultat. Jag kommer att använda de definitioner av kommunikation som görs i Skolverket (2011) och i Niss och Höjgaard Jensen (2002), eftersom de är mer ämnesdidaktiska än definitionen i det sociokulturella perspektivet. Kommunikationsförmåga förklaras som att med andra kunna utväxla information om idéer och tankegångar i matematik och att det sker i tal, skrift och med användning av olika uttrycksformer. Här innefattas även att kunna uttrycka sig på skilda sätt och skilda nivåer om matematiska företeelser för olika mottagarkategorier. Härutöver ingår att kunna förstå andras redogörelser, förklaringar och argument samt att föra matematiska resonemang. I Skolverkets (2011) definition av kommunikationsförmågan innefattas även resonemangs- och representationsförmågorna. I det första lektionsavsnittet och i elevintervjuerna visar eleverna och jag som lärare flera av dessa förmågor. Tim visar kommunikationsförmåga när han vill anknyta till och muntligt och visuellt bearbeta den serie dramatiserade handskakningar vi alldeles nyss studerat, genom att förklara hur han tänker utifrån sin figur. Han visar också denna förmåga genom att han över huvud taget gärna vill kommunicera olika lösningssätt med skilda uttrycksformer. Ett annat exempel är att han arbetar mot att övergå från den konkreta matematiken i verkligheten till abstrakt matematik. Han synliggör också resonemangsförmåga genom att fortsätta att resonera och utveckla frågeställningen i sin figur. Härutöver visar han även representationsförmåga genom att han med hjälp av en bild försöker få klarhet i sina tankar. Simon visar kommunikationsförmåga när han ser hur de andra eleverna arbetar med lösningen i sina figurer och med utgångspunkt från dem arbetar vidare med sin egen och även när han utifrån sin figur visar sin lösning. Han visar också en viss resonemangsförmåga genom att förklara hur han kommit fram till ett resultat med hjälp av figuren. Även representationsförmåga visar han med sin figur. Henrik synliggör kommunikationsförmåga när han tar del av de andra elevernas lösningsprocesser och låter dem påverka sin egen. Han visar denna förmåga och även en viss resonemangsförmåga när han senare förklarar sin egen lösning med hjälp av figuren. Representationsförmåga visar Henrik genom att rita och skriva streck i sin figur. Tim är genomgående under lektionstillfällena och intervjun själv drivande när det gäller att ta fram lösningar på problemet. Simon och Henrik visar också att de tar initiativ, men de låter sig i högre utsträckning styras av mig. I Skolverkets (2011) definition av kommunikationsförmåga poängteras även att kommunikationen skall ske muntligt, skriftligt och med stöd av varierade uttrycksformer. I det studerade lektionsavsnittet visar de tre eleverna alla dessa tre aspekter av kommunikation.

Niss och Höjgaard Jensen (2002) betonar i sin definition av kommunikationskompetensen i jämförelse med Skolverket (2011) även kapaciteten att kunna uttrycka sig på skilda sätt och skilda nivåer om matematiska företeelser. Tim synliggör i avsnittet att han kan se och uttrycka skilda nivåer i problemet, inte endast genom att han ritar med hjälp av en egen utvecklad metod utan att han också vill systematisera ritandet.

För övrigt visar jag som lärare i det valda avsnittet kommunikationsförmåga genom att lyfta fram och tala med eleverna om hur de kan rita en figur. Arbete sker även mot att kunna övergå från den konkreta matematiken till den abstrakta. Ett exempel är när matematiken abstraheras vid dramatiseringen till att visas i en lista och i en figur. Men när Tim utvecklar den aktuella lösningsmetoden uppmärksammar och tolkar jag inte det på ett relevant vis och ett väsentligt matematiskt innehåll missas därmed. Det medför att det tar längre tid att tillsammans se mönstret än det troligen skulle ha gjort om Tim hade fått utveckla sina tankar. Jag visar en viss grad av resonemangsförmåga då vidare resonemang sker i frågan, men det redan observerade används inte i tillräckligt hög utsträckning. Representationsförmåga visas genom att eleverna får dokumentera och rita en figur som avbildning av problemet.

”Den närmaste utvecklingszonen” (Vygotskij, 2001) är ett annat begrepp som kan användas som analysverktyg för det beskrivna lektionsavsnittet. Alla de tre eleverna befinner sig mer eller mindre hela tiden i denna zon, eftersom arbete sker med lösning av ett för eleverna nytt slags problem med för dem lite nya metoder. För Simon och Henrik ligger det närmast till och också i ”den närmaste utvecklingszonen” att använda den lösningsmetod som föreslås av mig, såsom den enkla listan och att därefter ta nästa metod att rita en figur. Därur fås fler resultat för antalet handskakningar. Tim ser istället en vidareutveckling av den enkla listan och gör en förbättrad figur, eftersom han troligen anser att strategin att enbart rita streck mellan cirklar är att gå ett steg tillbaka. Sannolikt är möjligheten att se mönstret med hjälp av ett systematiserat ritande och aritmetiska summor en mer lämplig utmaning för Tim än för Simon och Henrik. Detta ligger inom Tims ”närmaste utvecklingszon” på ett naturligt sätt, eftersom hans utvecklingszon i matematik kanske sträcker sig lite längre än de andra elevernas. Tim hade sannolikt i samarbete kunnat komma fram till mönstret med hjälp av denna metod. De andra två eleverna hade troligen också i samarbete kunnat komma fram till mönstret på detta sätt, om härutöver metoden dramatisering hade använts parallellt. Simon och Henrik har sannolikt en lite längre ”startsträcka” för att kunna använda aritmetiska summor som ett sätt att se mönstret.

Vygotskij (2001) framhåller att när en elev skall lära sig i sin ”närmaste utvecklingszon” kan utöver läraren även en lite duktigare elev utgöra stöd. I detta fall visar intervjuerna med alla tre eleverna att Tim ligger på en lite högre kunskapsnivå än de andra i matematik, vilket ibland kan göra det lite svårt för Simon och Henrik att följa med i hans resonemang. Det kan då vara mödosamt för Tim att förklara hur han menar. Ett exempel kan vara när han försöker förklara sin förbättrade metod med hjälp av figuren. Simon kan i viss mån utgöra lite stöd för Henrik i hans ”utvecklingszon”. Men totalt sett är det en väsentlig uppgift för mig i gruppen att försöka upptäcka var i sin utveckling de enskilda eleverna befinner sig och att som lärare hjälpa dem vidare i sitt lärande på ett lämpligt sätt.

Olika slags *redskap* kommer till användning för att eleverna i sitt lärande med hjälp av dessa skall kunna *mediera*, det vill säga att få omvärlden förmedlad och interagera med varandra och med läraren (Vygotskij, 1978). För medieringen är det sociala sammanhanget och samspelet väsentligt (a.a.), så som sker vid problemlösningstillfällena. De olika typer av redskap som nyttjas vid det valda lektionstillfället är vi själva i dramatisering, att skriva en enkel lista och att rita en figur. Även det svenska språket i tal och matematiska symboler och begrepp i tal och skrift är redskap som används. Alla dessa är tillsammans centrala för att lösa ett matematiskt problem som det vid undervisningstillfällena. Redskapen samverkar för att i mediering kunna angripa problemet och se mönstret för handskakningarna utifrån många olika infallsvinklar. När ett problem löses tillsammans och med varierade metoder och sätt att undersöka synliggörs många uttryck för det matematiska tänkandet och möjligheterna till fördjupad matematisk förståelse ökar. Eleverna visar också på ökad förståelse efter hand som nya metoder används vid problemlösningstillfällena. Ett exempel på vikten av att använda olika redskap är att dramatiseringen tydliggörs med hjälp av en enkel lista och att problemet sedan undersöks vidare med hjälp av en figur. Att eleverna vid handskakningar med varandra tydligt erfar på vilket sätt antalet ökar från två till tre och fyra personer visar de genom att de refererar till dramatiseringen även senare under problemlösningen. Detta tyder på att den är ett funktionellt redskap de själva kan återknyta till.

Hur kan *urskiljning och simultanitet* **(**Runesson, 1999) skönjas i lektionsavsnittet? Att använda olika strategier och metoder för att angripa problemet och att kunna se dem samtidigt och relationen dem emellan kan ge ökad och djupare förståelse för uppgiften. Det kan också ge en helhet och en meningsfullhet som inte skulle ha kunnat uppnås om problemet endast hade lösts på *ett* enda sätt. Här har jag som lärare en viktig uppgift i att parallellt åskådliggöra de olika strategierna för eleverna. Detta sker genom att vi inledningsvis dramatiserar, sedan skriver en enkel lista över de handskakningar som dramatiserats och därefter arbetar vidare genom att rita en figur. Strävan från min sida är att hela tiden försöka hålla alla de tre metoderna i medvetandet samtidigt. Marton och Booth (1997) framhåller att strukturen hos det mänskliga medvetandet är central för hur vi erfar – det vill säga uppfattar – företeelser. Om en individ kan urskilja och hålla flera aspekter i medvetandet samtidigt blir erfarandet mer meningsfullt (a.a.).

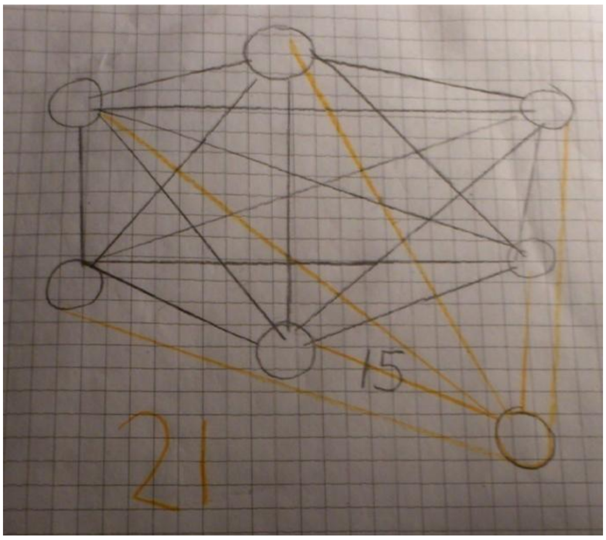
I intervjun menar Simon att något som övats i matematik vid problemlösningen är att rita, vilket visar att han ser detta som en användbar uttrycksform. Henrik anser att det är roligt att i ett problem kunna välja olika sätt att arbeta och att det även är roligt att fundera kring en uppgift under lite längre tid, så som skedde. Tim menar i intervjun att något nytt han lärt sig vid lektionstillfällena är att tänka efter noggrannare vilka andra lösningssätt det finns. Detta tyder på att alla de tre eleverna är medvetna om varierade metoder och även ser dem som en tillgång vid problemlösning.

6.3 Avsnitt 2: Undersöka mönster med hjälp av en tabell för att se ett samband

6.3.1 Beskrivning av resultat från lektionsavsnitt 2

Jag övergår nu till att beskriva ett andra lektionsavsnitt där eleverna och jag undersöker mönster med hjälp av en tabell. Avsnittet har hämtats från det tredje lektionstillfället (se Bilaga 3) och har valts för att visa hur arbetsprocessen kan se ut och på vilket plan kommunikationen sker i gruppen. Detta tillfälle inleds med att jag frågar eleverna om de funderat något på handskakningsproblemet sedan sist, men de säger att det har de inte gjort. Tim ritar en figur på sitt papper han har framför sig och ger nya förslag till hur många handskakningar det kan vara för 16 personer. Han föreslår fler än 41 och sedan 55 stycken och jag skriver upp förslagen. Jag beskriver därefter vad vi gjorde vid det föregående lektionstillfället; att vi gjorde en enkel lista för att försöka se ett mönster och att vi ritade figurer för fem och sex personer som skakar hand. Jag säger att vi nu skall rita figurerna lite finare med linjal så att man tydligt kan se linjerna mellan cirklarna (personerna). Figurerna skall göras så fina att de skulle kunna sättas upp på väggen eller användas för att förklara för en klasskamrat, om uppgiften hade ingått i den ordinarie undervisningen.

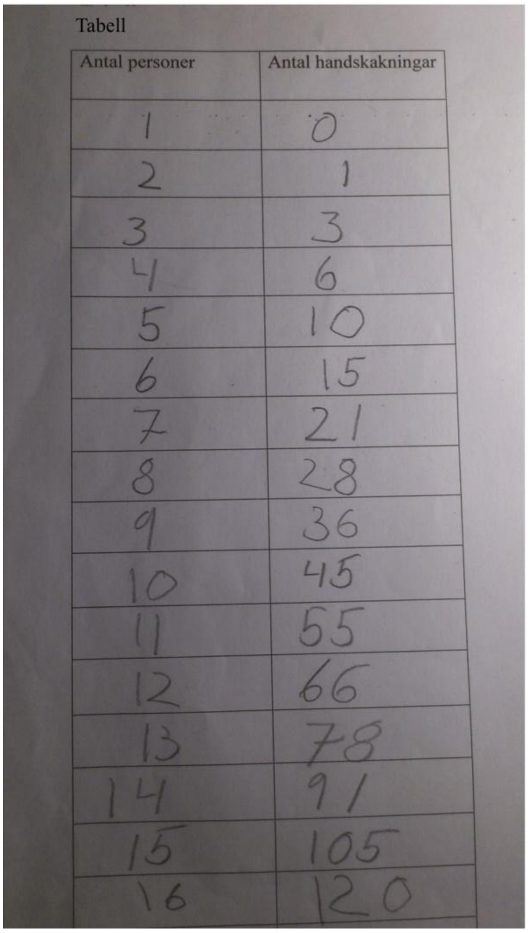
Därefter ritar eleverna lite finare figurer för sex personer som skakar hand. Vi hjälps åt så att alla kommer fram till 15 förbindelser. Sedan får eleverna i uppgift att i figuren rita in en sjunde person som tillkommer. Linjerna från den sjunde personen skall ritas i en ny färg (se Figur 4).



Figur 4. *Figur för att beräkna antalet handskakningar mellan sex respektive sju personer (orange färg), gjord av Henrik.*

Vi hjälps åt så att alla får resultatet + 6 handskakningar, vilket ger summan 21 stycken. Tim föreslår att vi skall se efter hur många handskakningar det är om det tillkommer ytterligare en person. Han säger att det då kanske blir mer än sex till, men ändrar sig och säger att det blir sju till. Så utbrister han glatt att han förstår mönstret. Simon ansluter till resonemanget och säger att om man tar en till så blir det åtta och en till så blir det nio mer. Tim och Simon verkar här se mönstret som visar ett samband. Jag frågar eleverna vad det då är som händer för varje person som kommer till. Henrik säger att det blir *en* hälsning mer och jag säger att det blir det, plus lika många. Mitt förslag är sedan att vi skall skriva en tabell så att vi kan studera resultatet lite närmare.

Det är här det studerade lektionsavsnittet startar. Eleverna får varsin tom tabell och vi börjar fylla i den; en person – noll handskakningar, två personer – en handskakning, tre personer – tre handskakningar, och så vidare (se Figur 5).



Tabell

Antal personer	Antal handskakningar
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66
13	78
14	91
15	105
16	120

Figur 5. *Tabell över antal personer och antal handskakningar, gjord av Tim.*

När vi kommer till sex och sju personer anknyter vi till de figurer eleverna nyss ritat. Tim vill fortsätta med åtta personer och räknar i huvudet att det är 28. Jag frågar Henrik vad han tror att nio är, men han säger att han inte vet. Då frågar jag eleverna hur de tycker att vi skall rita bredvid tabellen för att förstå mönstret. Men Tim fortsätter och säger det antal handskakningar han kommer fram till för nio, tio och elva personer. Då säger jag (citerat från Lektion 3):

- ”Ja, det är helt rätt. Men Tim, vet du vad… Jättebra! Vi kommer så småningom att komma fram till 16. Men innan dess vill jag att du förklarar för Henrik och Simon och mig hur du tänker. Hur ska man tänka, tycker du?”
- ”Vad då?” säger Tim.
- ”Nu när du räknar här nedåt… tio personer, elva personer”, säger jag (se Figur 5).
- ”Då tar man såhär: tolv, då tar man bort en, så 11 + 55. Sen tar man bort en från 13, 12 + ja, nu vad det blir. 66, ja”, säger Tim.
- ”Ja. Förstår ni hur han tänker?” frågar jag Henrik och Simon.

Båda skakar på huvudet.

- ”Nej, jag förstod inte”, säger Henrik.
- ”Nej. Han sa att han tar bort en, t.ex. om vi går in på femman: vad händer mellan femman och sexan?” säger jag. ”Om vi ökar med en person och ska skriva vad sexan är, då får vi tänka fem stycken för det är *en* mindre än antalet personer och så hade vi

tio från början. Så menar Tim då, tio + fem. Och man kan ju också tänka så att från början var skillnaden ett och sen… Jag skriver en pil och talet ett för att visa att skillnaden mellan de två är ett. Tim, tittar du också här? Du löser vidare? Skillnaden mellan de två är ett …”

- ”Skillnaden mellan de två är två”, säger Simon. (Vi ser alltså vad som händer med antalet handskakningar i tabellen när antalet personer ökar.) ”Skillnaden mellan de två är tre. Skillnaden mellan de två är fyra.”
- ”Jaa”, säger Henrik.
- ”Skillnaden mellan de två är…”, säger jag.
- ”Fem”, säger Simon.
- ”Det var det som ni såg när ni gjorde de här figurerna. Skillnaden mellan de två?” säger jag.
- ”Sex”, säger Simon.

För varje person som tillkommer ritar jag en pil bredvid tabellen och skriver talet som står för skillnaden mellan antalet handskakningar.

- ”Så kan man också tänka”, säger jag. ”Och sen går det uppåt. För att om ni ser i era figurer här…”
- ”136 är 17 personer och 120 är 16 personer”, säger Tim.
- ”120 stycken!” säger Simon.
- ”Ja, det är helt rätt”, säger jag. ”120 gånger hälsar man om man är 16 personer – alla skakar hand med alla.” (Se Figur 5)
- ”Vad sa jag från början, sa jag 107?” undrar Tim. ”Förra gången?”
- ”Du sa 204 förra gången”, säger jag, ”när du gissade. Men du hade ju också andra förslag; 125 och 122”, tror jag.
- ”Det var nära”, säger Tim.
- ”Ja, det var nära. Jättebra. Jättebra. Vad roligt! Kul att ni har kommit fram till det här. Vi kan titta så att alla förstår ordentligt så. Om ni tittar på era figurer. Hur kan man tänka när det kommer en till; hur många det blir? Om det kommer en sjunde här ska han hälsa åtta gånger?” säger jag.
- ”Ja”, säger Henrik.
- ”Nej, sex”, säger Simon.
- ”Och varför sex, varför inte sju”? undrar jag.
- ”För att det är bara sex andra, inte sju andra”, säger Simon.
- ”Jaa”, säger Henrik och Tim nickar.
  (slut på citatet)

Här slutar det studerade lektionsavsnittet. I avsnittet är Tim i hög grad intresserad av att komma fram till antalet handskakningar för 16 personer. Ända från start i lektion 1 har detta på ett tydligt sätt varit hans mål. Det syns genom att han kontinuerligt ger nya förslag till lösning och hela tiden vill arbeta vidare mot ett ökat antal personer. Men jag avbryter Tim eftersom jag tror att alla elever inte förstår hans resonemang. Jag ser det som ett tillfälle för honom att fördjupa de andras och även sina egna kunskaper genom att med hjälp av sin tabell förklara för sina kamrater. Han säger då att för tolv tar man bort en och det blir 11 + 55. Sedan, säger han, tar man bort en från 13; 12 +...66. Men det verkar vara lite mödosamt att förklara för kamraterna. Tim är inte så intresserad av att hitta ett förklaringssätt som är mest lämpligt för dem och de säger att de inte förstår hur han menar. Jag går in och försöker förtydliga vad Tim menar genom att säga att vi tar en mindre än antalet personer plus det vi redan har.

Med hjälp av tabellen visar jag även ett annat lösningssätt och räknar då tillsammans med eleverna ut differensen mellan antalet handskakningar för varje person som tillkommer och ritar en pil och skriver talet bredvid tabellen. Differensen är hela tiden lika stor som den föregående, adderat med ett. Tim arbetar under tiden vidare på egen hand. Detta andra lösningssätt som jag beskriver ansluter Simon till och det verkar vara lätt för honom att uppfatta och Henrik verkar då också förstå. Under tiden fortsätter Tim i sin tabell att beräkna antalet handskakningar upp till 17 personer. Han bryter in i samtalet när han kommit fram till antalet för 16 personer och konstaterar att det blir 120 stycken och vi pratar lite om det resultatet. Tim undrar då om sina tidigare förslag och vi ser att när han gissat tidigare har han i flera fall kommit nära det korrekta resultatet. För att se om alla tre elever verkligen har förstått mönstret ber jag dem därefter titta i sina figurer och fundera över hur man kan tänka när det kommer en person till. Jag frågar dem att när det kommer en sjunde, ska den personen då hälsa åtta gånger? Då svarar Henrik ja, vilket kan visa att han ännu inte riktigt förstått mönstret. Men Simon säger att det är sex handskakningar, eftersom att det bara är sex *andra*. Då verkar det som att även både Henrik och Tim förstår.

Efter det utvalda lektionsavsnittet fortsätter eleverna och jag att studera vad som händer med antalet handskakningar när en sjunde person kommer till, men även vad som händer när en tjugonde person tillkommer (se Bilaga 3). Därefter studerar vi ett annat sätt att beräkna antalet handskakningar för 20 personer genom att göra beräkningen 20 multiplicerat med 19 och sedan dividera med 2, vilket är en grund för att ge möjlighet att se ett generellt lösningssätt. Vi skriver sedan färdigt tabellen och jämför därefter resultaten i figuren med de i tabellen. Jag visar eleverna hur skillnaderna mellan antalet handskakningar kan skrivas bredvid i tabellen med hjälp av en pil och ett tal, så som vi gjort tidigare. Vi konstaterar slutligen att det finns många sätt att angripa problemet på och att lösa det.

Skolverket (2011) betonar att en väsentlig del i kommunikationsbegreppet är att kunna utväxla information i tal och skrift om matematiska tankegångar och då använda sig av en variation av uttrycksformer, främst för att öka begreppsförståelsen. Vid det utvalda lektionstillfället kommunicerar eleverna i skrift genom att de dokumenterar och då skriver en tabell och de kommunicerar också i tal genom den diskussion vi för. Vi vrider och vänder på problemet för att se det från olika infallsvinklar och använder de båda uttrycksformerna figur och tabell var och en för sig, men också parallellt. Detta ger möjlighet till en ökad och fördjupad förståelse hos eleverna av problemet. Förståelsen hade dock kunnat bli ännu större om vi hade haft med de aritmetiska summor (såsom 5+4+3+2+1=15) som Tim ville introducera redan under lektion 2, men som förbisågs av mig. Då hade vi bredvid figuren och tabellen för varje antal personer här kunnat skriva den aritmetiska summan av handskakningarna för att på ett tydligt sätt visa det samband som råder. Lektionsavsnitt 1 ger således konsekvenser för lektionsavsnitt 2. Det sätt på vilket vi uttrycker aritmetisk talföljd under den tredje lektionen är genom differenserna 1, 2, 3, 4, 5… mellan antalet handskakningar för varje person som tillkommer. Jag skriver också dessa bredvid min tabell och visar eleverna. Trots att vi gick miste om de aritmetiska summorna verkar det ändå som att alla de tre eleverna vid det tredje lektionstillfället uppnår en viss förståelse för mönstret och det samband som finns.

6.3.2 Sammanfattning av resultat från lektionsavsnitt 2

Det valda lektionsavsnittet föregås av att eleverna lite tydligare med linjal ritar en figur över sex personer som skakar hand. Därefter ritar eleverna med en ny färg in linjer från en sjunde person som tillkommer. Vi konstaterar att det blir ytterligare sex handskakningar och att den totala summan är 21 stycken. Tim säger att vi kan se efter hur många handskakningar det är med en person till och kommer fram till att det är ytterligare sju handskakningar. I samband med detta ser han ett mönster för antalet personer och antalet handskakningar och även Simon och till viss del också Henrik verkar se detta. I själva avsnittet skriver vi sedan en tabell över antal personer och antal handskakningar och för sex och sju personer anknyter vi till de figurer eleverna nyss ritat. Tim är inriktad på att nå fram till 16 personer medan de andra eleverna inte riktigt arbetar i samma takt. Därför avbryter jag Tim och ber honom förklara för de andra eleverna hur han tänker. Han förklarar att för tolv tar han bort en och det blir 11 + 55. Sedan säger han att han tar bort en från 13; 12 + 66. Det verkar vara lite svårt att förklara för kamraterna och de förstår inte hur han menar. Jag försöker förtydliga Tims förklaring genom att säga att vi tar en mindre än antalet personer plus det vi redan har. Jag visar också ett annat lösningssätt genom att vi tillsammans beräknar differensen mellan antalet handskakningar för varje person som tillkommer i tabellen. Differensen är för varje antal personer lika stor som den föregående, adderat med ett. Detta sätt att lösa verkar vara lite lättare för Simon och Henrik att se. Tim vill under tiden skriva vidare i sin tabell. Men strax därefter bryter han in i samtalet och säger att 16 personer är 120 handskakningar och vi pratar då om det resultatet. Sedan tittar vi lite på hur man kan tänka när det kommer en sjunde person och då verkar alla tre elever förstå.

Elevernas förståelse för mönstret hade sannolikt varit större i detta skede om jag hade uppmärksammat de aritmetiska summorna av handskakningar som Tim ville introducera redan under lektion 2. Vi hade då kunnat skriva dem bredvid figuren och tabellen för att på ett tydligt sätt visa mönstret och det samband som råder. Den matematiska kommunikationen i gruppen hade då kunnat fördjupas. Alla de tre eleverna verkar dock vid det tredje lektionstillfället se och också ha uppnått en viss förståelse för mönstret och därmed för sambandet.

6.3.3 Intervju med Simon

I den enskilda intervjun med Simon kan han till viss del beskriva hur mönstret för handskakningar ser ut. Han menar att det är lite svårt att se mönstret i början, men sedan blir det enklare. När jag frågar honom vad han tänker om ett sådant här problem som handskakningsproblemet, svarar han att det inte ska göras för fort, för då kan man lätt tappa bort sig i räkningen och får börja om med allting. Han ger ett exempel att om man ska räkna till 50 – att då räkna ut allt och inte räkna för fort.

När jag frågar Simon hur han tycker att det var att prata matematik så som vi gjorde i gruppen, svarar han att det var ganska bra. Ibland har han vid arbetet med uppgiften inte förstått vad som menas, när vi har kommit in på nya saker. Han säger att både han och Henrik då först varit frågande till det nya. Några gånger förstod de exempelvis inte vad Tim pratade om. Jag frågar Simon om det allmänt sett är lättare om en annan elev förklarar när han själv inte förstår, än om läraren gör det. Då menar han att det är lättare om läraren förklarar.

På frågan om han tycker att det är lättare eller svårare att arbeta i matematik på egen hand än i grupp, anser han att det är lättare på egen hand. När han ska förklara något han själv förstår för andra, kan det ta timmar att förklara för dem, menar han. Jag undrar om han känner att han lär sig lite mer och förstår på ett djupare sätt, när han förklarar för någon annan. Det säger han att han inte direkt gör, eftersom han redan kunde det han då förklarar.

6.3.4 Intervju med Henrik

I intervjun med Henrik kan även han till viss del beskriva mönstret för handskakningarna. När jag frågar honom hur han tycker att det var att prata matematik så som vi gjorde i gruppen, svarar han att det var kul. Han menar att det är roligt att under lite längre tid arbeta med en problemlösningsuppgift, om han också får fundera lite mellan tillfällena. Det fungerade bra att förklara för varandra i gruppen, anser han. Men, som nämnts tidigare, tillägger han att det borde ha varit lite längre betänketid vid en fråga, innan den diskuterades gemensamt i gruppen.

Jag frågar Henrik, om det är lättare att en annan elev förklarar, när han inte förstår, än att läraren förklarar för honom. Då svarar han att det beror på om det är en jätteduktig elev (min tolkning är att det då kan vara svårt att förstå), men annars kanske det inte är någon skillnad. På frågan om han tycker att det är lättare eller svårare att arbeta i matematik på egen hand än i grupp, svarar han att om det är jättetyst runt omkring kan det vara väldigt lätt att räkna på egen hand. Om det är flera som pratar, då kan det ibland vara lite svårare. Men ibland när vi samarbetar i lag, då kan det vara enkelt, menar han.

6.3.5 Intervju med Tim

I intervjun med Tim kan också han till viss del beskriva mönstret för handskakningarna. När jag undrar hur han tycker att det var att prata matematik så som vi gjorde i gruppen, anser han att det var bra att göra det tillsammans, att alla räknade ut det till sist. Vi kom inte fram till en lösning förrän sista gången. Då är det kul, menar han, jämfört med om vi hade kommit fram till lösningen redan första gången och sedan fortsatt med uppgiften. Tim anser att det var lagom med betänketid i de lika momenten. I början var det väldigt svårt att lista ut skillnaden, tycker han, men sedan kom han på den och är glad för det.

Jag undrar om det är lättare att en annan elev förklarar, när han inte förstår, än att läraren förklarar för honom. Då svarar han att oftast är det lättare när läraren förklarar, men *en* gång var det lättare när en elev förklarade. På frågan om Tim tycker att det är lättare eller svårare att arbeta i matematik på egen hand än i grupp, svarar han att på ett sätt är det lättare och på ett sätt är det svårare. Det är lättare att arbeta i grupp när de andra kan förklara, visa hur de tänker och räkna ut talet. Det är svårare då det kan bli lite tjatigt och jobbigt, om eleverna i gruppen har många olika typer av lösningar. Jag frågar Tim, om han känner att han lär sig på ett lite djupare sätt, när han och andra elever förklarar för varandra. Han svarar:

- ”Ja, för jag hinner ju tänka när jag förklarar och då listar jag ju ut mer och då kan jag förklara mer och få reda på mera.”
  (citat från intervju med Tim)

Han menar också att vid arbete med en problemlösningsuppgift under lite längre tid, så vet man att det löser sig till slut.

6.3.6 Sammanfattning av resultat från de tre intervjuerna

Alla de tre eleverna förklarar vad vi gjorde vid undervisningstillfällena och beskriver delvis det mönster vi kom fram till. De anser att det gick bra att prata matematik så som gjordes i gruppen. När det introducerades nya moment hade dock Simon och Henrik ibland först lite svårt att förstå, menar Simon. Henrik anser att betänketiden innan någon fick svara var för kort, medan Tim menar att betänketiden var lagom lång.

Rent allmänt när det är något de inte förstår, anser Simon och Tim att det är lättare att läraren förklarar, än att en annan elev gör det. Henrik menar att om det inte är en jätteduktig elev som förklarar (kan då vara svårt att förstå, min tolkning), kanske det inte är någon skillnad. Simon menar att det är lättare att arbeta på egen hand än i grupp, då det kan ta väldigt lång tid att förklara för andra. Han anser inte att han fördjupar sitt lärande när han förklarar. Henrik anser att det beror på bland annat ljudnivån i klassrummet, om det är lättare eller svårare att arbeta på egen hand. Tim, slutligen, uttrycker att det är lättare att arbeta i grupp när andra elever kan förklara för honom hur de tänker, men det är svårare när eleverna i gruppen bidrar med många olika typer av lösningar. Han menar att han fördjupar sitt lärande om han och andra elever förklarar för varandra.

Simon tar upp att man inte ska vara för snabb i en problemlösningsuppgift. Henrik säger att det är roligt att arbeta med en sådan uppgift vid flera tillfällen, med tid att fundera lite mellan gångerna. Tim anser att det är kul att arbeta med ett problem vid flera tillfällen och att då inte lösa det förrän sista gången. Detta visar på att alla tre kan se ett värde i att i matematik arbeta med ett problem under lite längre tid.

6.3.7 Analys av resultat

Kommunikation är ett huvudbegrepp i det sociokulturella perspektivet på lärande och innebär ett verktyg för att analysera resultaten från lektionsavsnitt 2. Jag kommer – i likhet med i analysen av lektionsavsnitt 1 (behandlas i avsnitt 6.2.7) – att använda de definitioner av kommunikation som görs i Skolverket (2011) och i Niss och Höjgaard Jensen (2002), eftersom de mer fokuserar ämnesdidaktik än definitionen i det sociokulturella perspektivet. Kommunikationsförmåga förklaras som att med andra kunna utväxla information om idéer och tankegångar i matematik och att det sker i tal, skrift och med användning av olika uttrycksformer. Här innefattas även att kunna uttrycka sig på skilda sätt och skilda nivåer om matematiska företeelser för olika mottagarkategorier. Härutöver ingår att kunna förstå andras redogörelser, förklaringar och argument samt att föra matematiska resonemang. I Skolverkets definition av kommunikationsförmågan räknas även resonemangs- och representationsförmågorna in och i det andra lektionsavsnittet och i elevintervjuerna visar eleverna och jag som lärare flera av dessa förmågor i högre och lägre grad. Tim visar en viss kommunikationsförmåga när han med hjälp av tabellen försöker förklara för de andra eleverna hur han tänker när 12 respektive 13 personer skakar hand. Men de andra förstår inte och han gör då inget försök att fortsätta att förklara eller att byta lösningssätt för att förklara utifrån en annan infallsvinkel. Istället återvänder han gärna till tabellen och sina beräkningar av antalet handskakningar. Hans sikte är inställt på att få ett svar på antalet handskakningar för 16 personer och nu ser han att resultatet är inom räckhåll. En aspekt av kommunikationsförmåga, som han tydligt uppvisar, är att kunna gå från konkret till abstrakt matematik genom att han till en tabell överför det vi dramatiserat och pratat om vad gäller handskakningar. Resonemangsförmåga visar Tim till en viss grad då han försöker förklara hur mönstret är systematiskt uppbyggt och hur han ser detta. Representationsförmåga synliggör han i avsnittet genom att han snabbt tar till sig tabellen som en användbar representation för att arbeta vidare med problemet – dock till stor del på egen hand. Han drivs av viljan att komma fram till ett resultat för 16 personer. Att Tim arbetar vidare nästan helt på egen hand utan att stämma av om de andra eleverna arbetar i samma takt är kanske inte helt avsiktligt och medvetet. I den enskilda intervjun när jag frågar honom om hur han tycker att det var att prata matematik så som vi gjorde i gruppen anser han att det var bra att göra det tillsammans, att alla räknade ut det till sist. Detta tyder på att han trots allt förstår denna väsentliga aspekt av att arbeta i grupp. I intervjun visar Tim också att han inser värdet av att förklara för andra och att andra förklarar för honom, då han menar att han hinner tänka när han förklarar och att han då listar ut mer. Det gör att han kan förklara ännu mer och få reda på mer, menar han.

Simon visar kommunikationsförmåga då han vid flera tillfällen ansluter till de resonemang jag introducerar. Ett exempel på detta är då han muntligen fyller i de nästkommande skillnaderna mellan antalet handskakningar då antalet personer i tabellen ökar. Han är aktiv i gruppens kommunikation och genom att besvara frågor visar han att han förstår och han visar även när han inte förstår. Resonemangsförmåga uppvisar Simon när han säger vad skillnaden i antal handskakningar är för ett ökat antal personer. Förmågan synliggörs också då han kan förklara varför det blir ytterligare sex handskakningar när en sjunde person tillkommer. Han uppvisar representationsförmåga genom att han helt och hållet förstår hur han skall skriva och använda tabellen som en representation och han klarar dessutom på ett bra sätt att parallellt studera figuren och resultaten i den. I intervjun med Simon menar han att Henrik och han ibland först har svårt att förstå då ett nytt moment introduceras. Sekvensen när Tim försöker förklara hur han tänker för 12 och 13 personer som skakar hand kan nog utgöra ett sådant moment, men då kommunicerar de båda eleverna tydligt att de inte förstår. Detta gör att jag försöker göra förtydliganden och också förklara med hjälp av ett annat lösningssätt.

Henrik visar kommunikationsförmåga då han tydligt säger att han inte förstår när Tim försöker förklara sitt sätt att tänka om handskakningarna. Henrik kommunicerar även då han verkar förstå hur mönstret för skillnaderna i tabellen ser ut och varför det är en ökning med sex handskakningar då en sjunde person tillkommer. Han kommunicerar också med hjälp av sin dokumentation när han skriver tabellen. Även Henrik är aktiv och hela tiden sysselsatt med det som händer i gruppen. Han visar inte så mycket resonemangsförmåga i just det valda avsnittet, men representationsförmåga uppvisar han däremot helt och fullt när han skriver och använder tabellen som en representation av problemet och genom att han parallellt studerar figuren och dess resultat. I intervjun menar Henrik att det borde ha varit lite längre betänketid vid en fråga innan gruppen diskuterade den gemensamt och detta är något jag tar till mig. I det valda avsnittet hade det nog gett Henrik större möjlighet att vara ännu mer aktiv och det hade i sin tur kunnat påverka händelseförloppet i gruppens arbete på ett positivt sätt. Alla de tre eleverna menar i intervjuerna att det är viktigt med mycket tid vid problemlösning och att det är positivt att återkomma till uppgiften. Det tyder på att de förstår att det kan vara betydelsefullt att vrida och vända på ett problem och att på olika sätt kommunicera och resonera om det med hjälp av olika representationer, som exempelvis figur och tabell.

För övrigt visar jag som lärare kommunikationsförmåga i det valda lektionsavsnittet genom att förklara hur eleverna kan skriva och använda en tabell och också att försöka se till så att alla elever är aktiva och ansluter till resonemanget om hur mönstret ser ut. Jag arbetar även mot att övergå från den konkreta matematiken till den abstrakta genom att överföra den tidigare gjorda dramatiseringen till att visas i en tabell. Jag ber också den elev som kommit längst i sitt tankearbete att stanna upp, gå tillbaka och försöka förklara hur han tänker. Jag kommunicerar vidare genom att försöka förtydliga elevens förklaring när de andra eleverna inte förstår och genom att även visa ett annat lösningssätt för att komma fram till mönstret. I avsnittet synliggör jag en viss grad av resonemangsförmåga, exempelvis när jag med pilar och tal skriver och visar skillnader bredvid tabellen. Resonemanget hade kunnat bli mer innehållsrikt och fördjupat om jag under lektion 2 hade observerat Tims utökade lösningsmetod. Då hade de aritmetiska summorna därifrån kunnat användas bredvid tabellen och klart tydliggöra mönstret och det samband som finns. Jag uppvisar representationsförmåga genom att tillsammans med eleverna skriva och sedan använda en tabell som en representation av problemet och att även använda den tidigare ritade figuren.

I begreppet kommunikationsförmåga betonas i Skolverkets (2011) definition även att kommunikationen skall vara muntlig, skriftlig och stödjas av olika typer av uttrycksformer. I det valda lektionsavsnittet visas den skriftliga komponenten när eleverna dokumenterar i skrift genom att skriva tabellen. Den muntliga delen synliggörs i samtalet i gruppen och vi använder då uttrycksformerna figur och tabell var för sig, men också parallellt. Den muntliga aspekten av kommunikation utgår i stort sett hela tiden från dessa båda uttrycksformer, vilket är i enlighet med Skolverket.

Niss och Höjgaard Jensens (2002) definition av kommunikationskompetensen i jämförelse med Skolverkets (2011) innebär en utvidgning till att förutom att omfatta kapaciteten att uttrycka sig på skilda sätt även uttrycka sig på skilda nivåer om matematiska fenomen. Uttryck på skilda nivåer kan inte tydligt skönjas i det studerade lektionsavsnittet.

I det studerade lektionsavsnittet framträder en bild av att även om en elev å ena sidan har en stor drivkraft och förmåga att arbeta och komma fram till resultat i matematik, så kan kommunikationsförmågan å andra sidan vara en annan sak. Det krävs mycket av elever för att förklara för varandra i kommunikation, bland annat förväntas den förklarande eleven se frågeställningen utifrån de andra elevernas perspektiv. Att även de tre eleverna själva är av en liknande uppfattning om elever som förklarar visar svar i de gjorda intervjuerna. En fråga gäller om det allmänt sett är lättare att en elev förklarar om de inte förstår än att läraren gör det. Majoriteten av eleverna (två av tre) menar att det är lättare om läraren förklarar och dessa uttalanden tyder på att kommunikationsförmåga inte kommer av sig självt hos elever. Här blir rollen för läraren med sin ämnesdidaktiska kompetens väsentlig, att exempelvis vid problemlösning i grupp göra många instick, förtydliganden och komma med följdfrågor. Då en hel klass har problemlösning i grupp blir det viktigt att läraren kan cirkulera runt och ta denna roll i alla grupper. Detta visar att det är en grannlaga uppgift och det kräver en hel del kommunikationsförmåga hos läraren. Men självfallet måste också elever träna på sin egen kommunikationsförmåga kontinuerligt under grundskoletiden.

Andra definitioner av begreppet kommunikation än de som använts hade medfört ett annat analysverktyg och andra tolkningsmöjligheter av studiens resultat. Om valet hade gjorts att analysera utifrån en vidgad definition av begreppet – även inkluderande den icke-verbala komponenten, såsom miner och kroppsspråk – hade resultatet blivit än mer nyanserat men också mer omfattande. Den i förväg fastställda tidsramen medförde att en begränsning fick göras. Om tolkning och analys hade skett utifrån en snävare definition av begreppet kommunikation – exempelvis allmänt att uttrycka sig och ta emot budskap från andra i tal och skrift – hade förståelsen av resultaten blivit mindre kvalitativ och ämnesdidaktisk och inte särskilt mångfacetterad. Genom att använda definitionerna i Skolverket (2011) och i viss utsträckning även i Niss och Höjgaard Jensen (2002) gjordes analys med utgångspunkt i ämnesdidaktik och i de gällande styrdokumenten för grundskolan och fokus låg således på det som är relevant för skolans värld.

Ett annat begrepp som kan användas som verktyg för att analysera det utvalda lektionsavsnittet är *”den närmaste utvecklingszonen”* (Vygotskij, 2001). I avsnittet befinner sig alla de tre eleverna i högre eller lägre grad i denna zon, eftersom vi arbetar med ett för dem nytt slags problem med ett delvis nytt angreppssätt. Eleverna befinner sig på lite olika nivå i sin matematiska utveckling och detta gör att lärarrollen blir att hålla en slags medelväg och försöka se till att alla deltar i resonemangen. Henrik verkar precis hålla på att uppnå förståelsen för hur mönstret ser ut. Simon har redan förstått en del av detta och förstår nu ännu mer. Tim har tydligt sett mönstret och är inte längre så intresserad av processen att komma fram till det, utan vill nå ett resultat på den ursprungliga uppgiften om antal handskakningar för 16 personer. Vygotskij behandlar att inlärning är som mest gynnsam då den kommer tidigare än utvecklingen. Den stimulerar då ett flertal funktioner som är i ett stadium av mognad och befinner sig i ”den närmaste utvecklingszonen”. Inlärning kan således själv starta en utveckling och något nytt, vilket är en positiv funktion. För Henrik startar inlärningen en utveckling av förmågan att se mönstret och det gör att han har en viss ”startsträcka” innan förståelsen nås. Simons förståelse har nått längre i sitt mognadsstadium och det går då snabbare för honom att uppnå relativt stor förståelse. Hos Tim hade kanske redan innan våra lektionstillfällen en förståelse mognat och utvecklats som en grund för inlärningen. Att se mönstret ligger i alla fall nära till för honom. Utifrån sett är det kanske så att av de tre eleverna är det Simon som har störst omedelbar behållning av lektionsavsnittet. Det kan bero på att det är en lämplig svårighetsgrad i utmaningen, eftersom mognadsstadiet i hans ”närmaste utvecklingszon” verkar ligga ungefär där undervisningen fokuseras. Simon är också den elev som i avsnittet är mest aktiv i gruppens kommunikation. Han verkar vara allra mest motiverad att delta i den och det kan då bero på att han också har störst omedelbart utbyte av den.

Vygotskij (2001) behandlar vidare att när en elev skall lära sig i sin ”närmaste utvecklingszon” kan läraren men också en lite duktigare elev fungera stödjande. Denna typ av samspel betonar Vygotskij som betydelsefull för lärandet. I avsnittet har Tim svårt att förklara hur han tänker om mönstret och klarar inte riktigt att vara ett stöd för de andra eleverna. Simons svar på mina frågor om mönstret kan till viss del verka stödjande för Henrik, men i övrigt blir det en viktig uppgift för mig som lärare i gruppen att vägleda eleverna i sitt lärande utifrån där de befinner sig i sin utvecklingszon. Som nämnts tidigare finns det olika aspekter som hade kunnat tillföras undervisningen för att nå större elevdelaktighet i resonemangen. Exempel är att använda aritmetiska summor för att förtydliga mönstret och att ge eleverna längre egen betänketid i de olika momenten.

I lektionsavsnittet använder vi olika slags *redskap* för att eleverna skall få möjlighet att *mediera*, vilket innebär att få omvärlden förmedlad till sig och att samverka eleverna emellan och med läraren. Både för redskapen och medieringen är den sociala och kulturella kontexten grundläggande. (Vygotskij, 1978) I problemlösningen i studien får eleverna möjlighet att lära sig i ett sociokulturellt sammanhang och olika redskap kommer till användning och mediering synliggörs. De redskap som kan skönjas i det andra utvalda avsnittet är en sedan tidigare ritad figur och att skriva en tabell. Därutöver är – i likhet med i det första lektionsavsnittet – det svenska talade språket och matematiska symboler och begrepp i både tal och skrift redskap vi nyttjar. Tabellen utgör en vidareutveckling av redskapet enkel lista som vi använde i det första avsnittet. Användning av varierade redskap är väsentligt vid problemlösning för att få många infallsvinklar på uppgiften och vid introduceringen av tabell som redskap eller metod verkar elevernas förståelse för mönstret – och därmed det samband som råder – öka ytterligare. Mediering löper som en röd tråd genom hela avsnittet genom att omvärlden blir förmedlad till eleverna och genom deras interaktion med varandra och med läraren.

Urskiljning och simultanitet utgör ytterligare ett analysverktyg för erhållna resultat. Väsentligt i detta begrepp är att kunna urskilja olika aspekter och relationerna dem emellan och att försöka hålla dem i medvetandet på samma gång. (Runesson, 1999) När avsnittet inleds börjar eleverna och jag att tillsammans skriva en tabell över antal personer och antal handskakningar. Vid sex och sju personer återknyter vi till figuren vi ritat tidigare under lektionen för att särskilt studera dessa antal personer och förtydliga hur många handskakningar det då är. Även under det fortsatta arbetet med tabellen återkommer vi till figuren för att underlätta elevernas förståelse med en alternativ infallsvinkel. Att använda flera lösningssätt och studera dem parallellt berikar möjligheten att se mönstret och det samband som råder. Marton och Booth (1997) menar att en välordnad struktur i en människas medvetande med flera samtidigt urskilda aspekter kan ge en högkvalitativ förståelse och en hög grad av mening.

7. Diskussion

Denna del inleds med en diskussion där jag redogör för styrkor och svagheter i de valda metoderna. Därpå följer en avslutande diskussion som inleds med en sammanfattning av studiens resultat. I diskussionen ställs resultaten och deras svar i relation till forskningsbakgrunden och även de didaktiska konsekvenserna av resultaten behandlas. Avslutningsvis föreslås områden för fortsatt forskning, vilka inte kunnat beaktas inom ramen för denna studie.

7.1 Metoddiskussion

Cohen et al. (2007) behandlar att observation i genuina miljöer kan medföra bekymmer eftersom forskaren inte har någon kontroll över vad som händer. Det kan få till följd att observationerna blir mindre användbara då det blir färre data att nyttja, vilket kan göra att det blir svårt att dra giltiga slutsatser. (a.a.) Att själv ha undervisningen med de tre eleverna – istället för att elevernas klasslärare skulle ha haft den – gjorde det möjligt att planera lektionerna så att fokus helt och hållet kunde ligga på kommunikationsförmåga och så mycket data som möjligt om denna kunde samlas in. Det var positivt också därför att tiden för studien var begränsad. Att ha egna lektioner var adekvat i förhållande till syftet, då det var lättare att undersöka och få inblick i hur läraren genom sin matematiska kommunikationsförmåga ger stöd för elever att utveckla sin förmåga att kommunicera i matematik om jag själv hade lärarrollen vid lektionstillfällena.

Det finns även svagheter med att undervisningen skedde på detta sätt. Det skulle kunna vara att de inte haft mig som lärare tidigare och att situationen att ha lektioner med tre elever i ett särskilt grupprum är en för dem lite ovan situation. Med detta i åtanke inleddes därför mitt arbete av – förutom ett besök i den aktuella klassen – ett lektionstillfälle då vi på lite kortare tid löste ett matematiskt problem på liknande sätt som i studien. Vid detta tillfälle fick eleverna och jag chans att lära känna varandra lite och problemlösningsuppgiften som skulle vara föremål för studien kunde då introduceras. Utöver detta kunde även filmutrustningen testas. Ett alternativ till att vara i ett grupprum hade varit att ha lektionerna i elevernas klassrum efter skoldagens slut, men nackdelarna med att de då är tröttare efter en hel skoldag bedömdes överväga fördelarna. Den egna delaktigheten i händelserna gjorde att jag hela tiden fick vara observant och reflexiv vid sammanställning av resultat och vid analys så att händelserna sågs objektivt så långt som det någonsin var möjligt. Transkribering av de lektionsavsnitt som valdes ut bidrog till att kunna se lärarrollen utifrån på ett bra sätt.

Med anledning av min roll som lärare i studien kompletterades valet av deltagande observation och intervju med aktionsforskning. Rönnerman (2004) beskriver hur denna utgår från skolans praktik och praktikern – t.ex. läraren på en skola – blir delaktig i en förändringsprocess. Efter att ha fokuserat en frågeställning följer förändrat agerande i verksamheten och därefter sker utvärdering och reflektion. (a.a.) I efterhand kan jag se att det var bra att komplettera metodvalet med aktionsforskning eftersom jag som lärare inte bara kunde påverka händelseförloppet under lektionerna, utan även få en god inblick i skeenden kring kommunikationsförmågan och hur mångfacetterad lärarens roll kan vara.

Själva filmningen i den deltagande observationen av lektionerna kan ha vissa nackdelar. Eleverna är medvetna om att det filmade materialet senare kommer att studeras och användas för en uppsats och det kan göra att de känner sig mer observerade än vanligt. Jag försökte i så stor utsträckning som det var görligt att avdramatisera själva filmningsmomentet för att få dem att så lite som möjligt tänka på filmkamerans existens. Jag menar att det lyckades bra eftersom eleverna vid de olika tillfällena inte verkade ta så stor notis om att kameran stod på inspelning.

En annan svaghet kan vara att tre elever är ett litet urval. Men lektionerna hölls med samma tre elever vid tre lektionstillfällen. Hade istället tre olika grupper om tre individer lottats fram för ett tillfälle var, hade vi inte hunnit alls lika långt i problemlösningsprocessen. Det krävs tid för denna process och för att nå en djupare förståelse både av det matematiska problemet och av hur kommunikationsförmågan ter sig (Hagland et al., 2005). Att gott om tid var något som alla de tre eleverna också själva önskade och som upplevdes som väsentligt – exempelvis tid för att tänka själva – framkom vid intervjuerna. Flera tillfällen gav chans för begrepp och metoder att mogna hos eleverna. Om undervisning istället för med en grupp om tre elever hade hållits med en hel klass hade inte varje elev kunnat vara i blickfånget på samma sätt och få den rikliga uppmärksamhet som kunde ske i min studie. En liten grupp elever gav en lämplig mängd av varianter på kommunikation att studera och möjlighet att komma fram till vad jag skulle fokusera på. Som behandlats tidigare finns en stor vidd i tillämpbarheten för begreppet kommunikationsförmåga. Det finns många likheter mellan resultat och erfarenheter av kommunikationsförmågan i en grupp med tre elever och i en hel klass och likheterna överväger kraftigt i jämförelse med skillnaderna. Avsikten var att göra en studie för att få en fördjupad inblick i och medvetenhet om kommunikationsförmågan i matematik. Det bedömdes då vara lämpligast att studera tre elever över en viss tid. Avsikten med studien var heller inte att kunna dra generella slutsatser för elever i år 3.

För att kunna erhålla mer tillförlitliga resultat förordas triangulering – en kombination av flera metoder. Att inkludera intervjuer ger möjlighet att få reda på elevernas bakomliggande tankar och deras uppfattningar av lektionstillfällena. (Cohen et al., 2007) I efterhand kan jag se att det var ändamålsenligt och värdefullt att intervjuer med eleverna ingick som en metod. Det framkom då efter lektionstillfällena ett flertal nya saker och därmed kunde en fördjupad förståelse av deras synsätt på företeelserna uppnås. Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) framhåller vikten av att följa upp barns svar och uppmuntra dem att utveckla sina tankar och att det är väsentligt att ha följdfrågor i beredskap. Detta hade jag stor nytta av då jag vid flera tillfällen fick en annan och också fördjupad uppfattning av en frågeställning när jag bad eleven berätta mer.

Utformningen av studiens forskningsprocess har gjort att jag har fått reda på mycket om det jag ville veta utifrån syfte och frågeställningar. Min medvetenhet om lärarens kommunikationsförmåga i matematik har ökat. Studien har klarlagt hur elever och en lärare kan kommunicera kring ett matematiskt problem – hur elever kan kommunicera för att nå en lösning och hur läraren kan bidra för att utmana och utveckla deras kommunikationsförmåga. De valda tillvägagångssätten har således fungerat väl. Om jag såhär i efterhand skulle förändra något vore det i så fall att i de deltagande observationerna i ännu större utsträckning uppmana eleverna att förklara matematiken i problemet för varandra. Detta hade sedan kunnat följas upp i intervjuerna genom att frågor hade ställts hur eleverna upplevde att förklara och att få förklarat för sig.

7.2 Resultatdiskussion

Syftet med denna studie var att undersöka hur läraren genom sin matematiska kommunikationsförmåga ger stöd för elever att utveckla sin förmåga att kommunicera kring och lösa ett matematiskt problem. Ur detta syfte utkristalliserade sig följande frågeställningar:

Hur kommunicerar eleverna med varandra och med läraren vid lösning av ett matematiskt problem i grupp?

Hur bearbetar och analyserar eleverna problemet?

Hur bidrar läraren i kommunikationen för att utmana och utveckla elevernas kommunikationsförmåga?

Vilka effekter får lärarens bidrag på arbetet i gruppen?

Jag har sökt svar på ovanstående frågeställningar och de svar jag har fått fram har hjälpt mig i min ambition att uppnå syftet med studien. De svar jag erhållit är att elever kommunicerar kring ett matematiskt problem på väldigt olika sätt. Det gäller för läraren att vara observant och se olika uppslag som eleverna ger för att inte gå miste om relevanta sätt att tänka. De tre studerade eleverna har lätt för att tillämpa olika strategier för att undersöka problemet. De har för sin matematiska förståelse också stor nytta av de olika strategier vi använder oss av; såsom att dramatisera, skriva en tabell (lista), leta efter ett mönster, rita en figur och undersöka ett enklare fall (Pólya, 2003; Hagland et al., 2005) och vid kommunikation utgår de till stor del från dessa. De visar också i intervjuerna att de själva är medvetna om att strategierna utgör viktiga komponenter i problemlösningsprocessen. När eleverna skall förklara för varandra hur de löser en uppgift beskriver de vägen till svaret och förklarar inte spontant hur de tänker. För att de elever som får förklarat för sig skall förstå, krävs en insats av läraren för att med sin ämnesdidaktiska kompetens bedöma hur det med hjälp av olika lösningssätt kan vara lämpligt att förklara. Två av de tre eleverna anser allmänt sett att det är lättare att förstå när en lärare förklarar än när en elev gör det. Dessa två elever uttrycker också att det kan vara lite svårt att förklara för varandra elever emellan.

I studien framträder en bild av att om läraren missar ett lösningssätt som kommuniceras av en elev kan det få tydliga följder för hur händelseförloppet utvecklas; i detta fall *när* vi kunde upptäcka ett mönster – och därmed det samband som råder – och även *på vilket sätt* vi gjorde det. Det kan också skönjas att även om en elev å ena sidan ligger på en hög nivå i matematik, kan å andra sidan kommunikationsförmågan vara en annan sak. Det fordras en hel del av en elev i år 3 för att kommunicera förklaringar för andra elever och att se uppgifter utifrån deras perspektiv. De tre eleverna kommunicerar i stor utsträckning på olika sätt. Detta visar att det är en grannlaga uppgift för en lärare att sedan överfört till en hel klass hjälpa elever att utveckla sin kommunikationsförmåga.

Många forskare menar att det fungerar väl när elever arbetar tillsammans i mindre grupper i matematik. Runesson (1995) beskriver att elever i grupparbete under positiva sociala omständigheter använder sin erfarenhet, formulerar frågor, kommer med förslag till lösningar och framför argument. Vidare hävdas att lärarens sätt att fundera kring ett innehåll kan se lite annorlunda ut än elevernas. Därför kan det för många elever upplevas enklare att förstå när en annan elev förklarar än när läraren gör det. Även Nilsson (2005) lyfter fram fördelar med grupparbete, såsom möjlighet till ökad kreativitet genom många infallsvinklar när argumentation och slutledning ingår i en uppgift. Det finns emellertid ståndpunkter i strid med detta. Exempel på det är Ahlberg (1992), som i sin studie menar att lärarna där uttrycker att kommunikationen mellan elever i små grupper sällan gäller ett fördjupat innehåll. Eleverna förklarar inte, utan ger korta, generella kommentarer om olika lösningsförslag och motiveringar uteblir ofta. Läraren upplever det då vara svårt att gå in och fördjupa resonemangen i samtalet. Även Löwing (2006) redovisar med resultat från sin studie ett liknande perspektiv att det krävs stor didaktisk förmåga hos läraren vid matematiskt arbete i grupp för att alla elever skall vara delaktiga i arbetet och att fördjupade resonemang skall kunna åstadkommas. Det är mödosamt för elever att utveckla det matematiska språket och kommunikationsförmågan på egen hand. Min studie visar att det kan vara komplicerat för elever i en grupp att resonera om olika lösningssätt och förklara för varandra hur de kommer fram till ett resultat. Att sätta sig in i hur andra elever tänker och vilket lösningssätt som kan vara lämpligast att använda vid förklaring kan vara krävande. Eleverna har svårt att själva göra förtydliganden och komma med följdfrågor och utan läraren blir resonemangen inte särskilt fördjupade. Eleverna har visserligen inte heller någon ämnesdidaktisk utbildning för detta.

Som behandlats tidigare framhåller Vygotskij (2001) att när en elev skall lära sig i sin ”närmaste utvecklingszon” kan läraren men också en lite duktigare elev utgöra stöd. Min studie visar att det är svårt för eleverna där att assistera varandra i sina respektive utvecklingszoner. Det blir i många fall läraren som får ta denna roll och hjälpa dem vidare i sitt lärande. Det är komplext för elever att inta andra elevers perspektiv och att se var i sitt lärande de befinner sig.

Vad kan då läraren göra för att utveckla elevers samarbete och kommunikationsförmåga i grupp i matematik? Läraren bör inledningsvis diskutera med eleverna vad det innebär att arbeta i en grupp; att ge alla gruppmedlemmar lika stort talutrymme och att allas utsagor fullt ut respekteras. När det gäller kommunikationsförmågan bör elever få möjlighet att kontinuerligt under grundskoletiden öva på denna. Här blir lärarens roll att reflektera över vad denna förmåga innebär och hur lärarens egen förmåga eventuellt kan förbättras. Uppgifter för läraren blir också att lägga grunden för en kommunicerande atmosfär i klassrummet, studera vad eleverna behöver träna på i sin kommunikationsförmåga och ge dem rika tillfällen att öva, bland annat genom problemlösningstillfällen i grupp och i helklass. Lärarens roll innebär då även att specifikt undervisa eleverna i hur de kan göra när de kommunicerar kring en matematikuppgift – exempelvis förklarar – för att de skall bli bättre på detta. Att reflektera och ge eleverna möjlighet att öka sin medvetenhet om hur arbetsgången kan vara vid exempelvis lösning av ett problem är en lämplig utgångspunkt. För att kunna upptäcka strukturen i en uppgift är frågor som elever kan ställa sig inför arbetet med denna: Hur ser sammanhanget ut? Hur tolkar jag uppgiften? Hur kan helheten och detaljer i problemet ses? Vilka strategier kommer till användning vid lösning? Hur använder jag hållpunkter, det vill säga egna referenser i form av tidigare erfarenheter (exempelvis en vinkel på 90^{o})? Hur bedömer jag rimligheten i resultatet? (Reys & Reys, 1995) Ett annat sätt kan vara, menar jag, att läraren efter att ett problem är löst ställer frågor, såsom ”Du fick detta resultat – varför valde du att lösa problemet på det här sättet?”. Det är väsentligt att elever med hjälp av ett matematiskt språk får sätta ord på sina tillvägagångssätt och att man medvetandegör för eleverna när de gör framsteg i att förklara. Ahlberg (1992, även Löwing, 2006; Riesbeck, 2008; Taflin, 2007) poängterar vikten av att lärare och elever gemensamt efter ett matematiktillfälle sammanfattar och reflekterar över elevernas arbete och även återkopplar och sätter det i relation till vad de tidigare lärt sig. Att läraren inför och efter ett grupparbete även exakt tydliggör för eleverna vilka mål i matematik som arbetet sker mot och vilka förmågor som tränas just vid detta tillfälle, är också mycket väsentligt, anser jag.

Att språket är ett väsentligt redskap för att elever tillsammans skall kunna sätta fokus på val av hållbara metoder och strategier vid problemlösning och därigenom utveckla sin matematiska förståelse hävdas inom forskningen (Ahlberg, 1995; Ahlberg, 2011; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008). Det är av stor vikt att elever uppmärksammas, i första hand av läraren, på olikheterna i form av konkret och abstrakt matematiskt tänkande och språk i den vardagliga respektive den matematiska diskursen, vilket gör det möjligt att förstå de matematiska begreppens väsen. Läraren kan utmana eleverna genom att ställa frågor och en grund kan läggas för att lösa ett matematiskt problem med hjälp av båda sätten att tänka. (Ahlberg, 1992; Löwing, 2006; Riesbeck, 2008; Taflin, 2007) Min studie visar att elevers språk behöver utvecklas för att i en grupp bli mer välfungerande. Det är svårt för elever att göra förtydliganden, ställa uppföljande frågor och fördjupa sina resonemang och argument om inte ett tillräckligt utvecklat språk finns. Ett medvetet och målinriktat arbete med att utveckla både elevers vardagliga och matematiska språk kan leda till en mer effektiv kommunikation i en grupp, menar jag. Det handlar återigen om att eleverna får tillfälle till reflektion, denna gång över hur språket som används kan te sig. Även Vygotskij (2001) lyfter fram språket och att en människas begreppsbildning utvecklas genom detta.

Frågor som läraren kan ställa till eleverna för att utveckla deras tänkande och kommunikation i den vardagliga respektive den matematiska diskursen kan vara: ”Vad innebär det att? Hur ser du på detta? Varför blir det på det sättet?” (Riesbeck, 2008, s. 65) Det får då till följd, hävdar jag, att eleverna för sig själva och tillsammans med andra reflekterar över innebörder av begrepp för en ökad förståelse och också för en ökad förmåga att kommunicera kring dessa. Det är här även av stor vikt att återkoppla ett arbete till tidigare arbeten eleverna gjort och de kunskaper de har med sig därifrån för att möjliggöra för dem att se relationer och sammanhang i matematiken.

Olika sätt att bearbeta begrepp och strategier i matematikundervisningen framträder som väsentliga. Riesbeck (2008) understryker att språkligt formulerad kunskap med förmåga att framföra argument är en betydelsefull beståndsdel i undervisningen. *Reflektion* har behandlats ovan och även *att gestalta* matematik, det vill säga att tala och skriva om matematiska begrepp för att ge en utveckling av tänkandet, är väsentligt för meningsskapandet. Även *tolkande* av matematik – aktivt och kritiskt lyssnande och läsande – har en viktig funktion. (a.a.) För att med hjälp av språket utveckla elevers matematik krävs således mycket mer än att bara undervisa i räknefärdighet och tyst räkning. Det krävs undervisning utöver läroboken så att ett mer mångfacetterat lärande genom kommunikation kan ske, vilket ger möjlighet till ökad och fördjupad matematisk medvetenhet och förståelse.

Taflin (2007) lyfter fram fyra olika representationer som betydelsefulla redskap vid problemlösning för att vara ett stöd och ett uttryck för tanken, såsom exempelvis konkret respektive grafisk/geometrisk representation. För att utveckla det matematiska tänkandet bör representationerna varieras (a.a.). I min studie användes skilda representationer i form av exempelvis dramatisering, figur och tabell (lista). Eleverna visar också en progression i sin förståelse allteftersom fler representationer introduceras och de vill återknyta till tidigare använda representationer, vilket kan visa att de förstår vikten av dem. De uttrycker också i intervjuerna att det är väsentligt med mycket tid vid problemlösning och att det är bra att fundera på en uppgift vid flera tillfällen och med hjälp av olika representationsformer.

Kommunikationsförmågan definieras i kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) som ett utbyte av information med andra om tankegångar i matematik och att utbytet sker i tal, skrift och med stöd av olika uttrycksformer. Det precisa matematiska språket poängteras som väsentligt för att kunna kommunicera med olika mottagare och för olika ändamål. Skolverket fastslår att det är först när elever har utvecklat kommunikationsförmågan som matematiken kan bli ett funktionellt verktyg i olika situationer. Detta tyder på att det är av grundläggande betydelse att ha med sig denna förmåga. Kommunikation i just matematik är skilt från annan slags kommunikation eftersom i denna en pendling mellan ett strikt matematiskt språk och ett vardagsspråk ständigt pågår. Att det är möjligt att kommunicera på så många olika sätt; i tal, skrift, bilder, med hjälp av en tabell eller ett diagram ger förutsättningar för förståelse på så skilda sätt. Att använda varierade uttrycksformer som stöd ger möjlighet till ett mångfacetterat synsätt, där varje individ också har förutsättningar att finna tankesätt som fungerar bäst för honom/henne själv, vilket är mycket positivt. De olika strategier som vi använde vid problemlösningen, såsom dramatisering, figur och tabell, var verkligen värdefulla verktyg dels i arbetet mot en lösning, dels som stöd i dokumenterad form för att lättare kommunicera lösningen. Även här kan ju elever ha valmöjlighet och välja en strategi som de har lättast att förstå som utgångspunkt för kommunikation. Jag upplever att de varierade strategierna är betydelsefulla för den matematiska förståelsen och för kommunikationen. Kommunikation utan stöd i form av de olika dokumenterade uttrycksformerna hade kunnat bli väldigt torftig och ytlig.

Även resonemangsförmågan ingår i Skolverkets (2011) definition av kommunikationsförmågan och därför inkluderas även att kunna förklara, argumentera och föra resonemang i matematik samt att lyssna till och förstå andra i detta. I problemlösningen i studien ingick som en naturlig del att förklara, argumentera och resonera för att arbeta sig fram till en lösning. En utveckling av lektionstillfällena hade kunnat vara att uppmana eleverna att förklara för varandra i ännu högre utsträckning och att även resonera mer kring strategierna.

Genom att studera definitioner av kommunikations-, representations- och resonemangsförmågorna och hur de är sammanlänkade har min medvetenhet om kommunikationsförmågan i undervisningen ökat. Denna förmåga är ett mångfacetterat begrepp och kräver att läraren ser matematiken i exempelvis ett problem på åtskilliga plan. Men det är också en spännande utmaning att placera kommunikationsförmågan mer i centrum för undervisningen, då matematiken genom detta får ett så mycket rikare innehåll.

7.3 Slutdiskussion

I min studie visar det sig att en elev som ligger på en hög nivå i matematik har svårt att förklara för sina kamrater i gruppen hur han kommit fram till en lösning. Hos mig finns en fundering, även med andra erfarenheter i åtanke, att det kanske kan vara så att duktiga elever i allmänhet finner det mer mödosamt att förklara för andra än lite mindre duktiga elever gör. Detta påverkar då kommunikationsförmågan. Duktigare elever kanske har en god taluppfattning och en god matematisk förståelse, men har egentligen aldrig behövt reflektera över hur de tänker och därför är de heller inte vana vid att förklara för andra. Men sannolikt är det så att det går relativt snabbt för dessa elever att öka sin förmåga att förklara. Om läraren sitter med och vägleder elever när de gör detta kan de få med sig bra modeller för hur de kan gå tillväga.

Det är intressant att reflektera över hur olika förändringar i mitt agerande som lärare i gruppen med de tre eleverna hade kunnat påverka händelseutvecklingen. En sådan förändring hade kunnat vara att eleverna vid ett nytt moment skulle ha fått mer tid att först på egen hand fundera genom att tänka och skriva. Då hade nog kommunikationen och problemlösningen gestaltat sig på ett lite annat sätt och spontanitet och snabbtänkthet hade inte premierats i lika hög utsträckning. En kombination i högre grad av eget arbete och grupparbete hade kunnat åstadkommas, vilket hade varit positivt. Generellt sett är gott om tid väsentligt i problemlösning, bland annat för att begreppsförståelse skall hinna mogna. Alla de tre eleverna uttrycker i intervjuerna att det är betydelsefullt med mycket tid vid problemlösning och två av dem menar dessutom att de hade önskat längre egen betänketid vid ett nytt moment än vad som var fallet.

En annan förändring i mitt agerande hade kunnat vara att fånga upp det uppslag som en av eleverna gav om att använda aritmetiska summor för att beskriva mönstret för antalet handskakningar. Då hade vi kunnat upptäcka mönstret tidigare än vi gjorde. Dessa summor hade dessutom kunnat skrivas bredvid respektive rad i tabellen för att förtydliga. Detta hade kunnat fördjupa elevernas förståelse för mönstret och därmed för sambandet.

Ytterligare en förändring jag skulle kunna ha gjort är att vi tillsammans i gruppen hade kunnat reflektera lite mer över vad vi gjorde vid de olika passen. Jag hade kunnat fråga eleverna hur vi gjorde när vi använde olika strategier för att angripa problemet och när de förklarade för varandra. Eleverna kanske inte såg hela innehållet i strategierna utan de strävade i första hand efter det rätta svaret. Detta hade gett en återkoppling till det vi gjort tidigare och möjlighet för eleverna att se en struktur i lektionerna. Att se ett sammanhang i arbetet skulle kunna ha gett än större motivation och lust att lära. Det hade också gett förutsättningar för metakognition och att sedan lättare tänka i ett matematiskt problem på egen hand och även för att förklara för varandra. Om elever tänker lättare på egen hand kan detta också utveckla ett arbete i grupp genom att eget arbete är en grund och att var och en på ett tydligare sätt kan tillföra sin del till arbetet.

Läraren har således en mycket väsentlig roll i matematikundervisningen och vid problemlösning i grupp är denna uppgift inte mindre än annars. Problemlösning i grupp är inte något elever bemästrar med en gång och på egen hand, utan det krävs en hel del vägledning och följdfrågor från läraren med sin ämnesdidaktiska utbildning för att de matematiska resonemangen skall bli fördjupade. Modellering från lärarens sida för att visa hur tankegångar vid lösning av en uppgift kan förklaras krävs också. En viktig grundförutsättning är att läraren för sig själv har klargjort syftet med grupparbetet för att sedan kunna realisera detta.

I min studie bortser jag från en del aspekter, eftersom vissa begränsningar tyvärr måste göras på grund av den avsatta tiden för uppsatsen. De aspekter på kommunikationsförmåga som elevernas klasslärare skulle ha kunnat tillföra uppsatsen har inte behandlats. En annan aspekt som heller inte uppmärksammats är genusfrågan och hur istället händelseutvecklingen i en grupp bestående av tre flickor hade tett sig, jämfört med den aktuella gruppen med tre pojkar.

7.4 Förslag till vidare forskning

Kommunikationsförmågan lyfts fram som mer central i den nuvarande kursplanen för matematik än vad som gjorts tidigare och det gör att det är angeläget med forskning inom detta område. Min förhoppning med denna studie är den kan inspirera till fler studier kring kommunikationsförmågan i matematik. Det finns mycket intressant att undersöka när det gäller hur en grupp kan arbeta i matematik och hur kommunikationsförmågan inverkar på detta arbete. En kommande studie skulle kunna fokusera flera mindre grupper med elever och lärare som arbetar med problemlösning. Här skulle kunna studeras vilka enskilda faktorer som är mest betydelsefulla för att arbetet blir välfungerande och att gruppmedlemmarnas matematiska utveckling blir markant. En fråga som uppstår ur detta är dessutom hur man lämpligast mäter att utvecklingen blir markant – genom att bedöma processen eller genom ett avslutande test, eller en kombination av dessa?

En annan intressant frågeställning att titta närmare på, vore att studera hur elevers utveckling och lärande när de förklarar för varandra skall förhålla sig till sina kamraters. Skall alla elever tränas i att förklara – både de som redan är duktiga på det och de som behärskar det mindre bra? För vem sker träningen – för den som förklarar eller för den som får förklarat för sig? Vad i utvecklingen skall betonas? Här är, som jag ser det, kommunikationsförmågan som den beskrivs i syfte och mål i styrdokumenten en viktig utgångspunkt.

En annan angelägen fråga är i vilken utsträckning genusaspekten påverkar händelseförloppet och kommunikationsförmågan i en mindre grupp vid lösning av ett matematiskt problem. Att studera en grupp bestående av tre flickor stället för tre pojkar vore mycket spännande. Detta var avslutningsvis några frågeställningar som väckts under studiens gång, men som inte rymts inom ramen för den.

Referenser

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 87.

Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik: problemlösning på lågstadiet.* Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, A. (2011). Communicating mathematics in primary school. In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström & M. Löwing (Eds.), *Voices on learning and instruction in mathematics* (pp. 143-158). Gothenburg: National Center for Mathematics Education (NCM), University of Gothenburg.

Berlin, J. (2004). Aktionsforskning – en problematisering. I K. Rönnerman, G. Tornberg, U. Axėn, K. Bergström, E. Nyberg, Å. Söderström, L. Folkesson, A. Olin, J. Nylund, A. Eriksson, L. Westberg & J. Berlin (Red.), *Aktionsforskning i praktiken: erfarenheter och reflektioner* (s. 209-220). (1.uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Bergqvist, E. & Österholm, M. (2012). Communicating mathematics or mathematical communication? An analysis of competence frameworks. In: Tai-Yih Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2*. Paper presented at The 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taipei, Taiwan, 18-22 July 2012. (pp. 67-74). Taipei, Taiwan: PME.

Claesson, S. (2007). *Spår av teorier i praktiken: några skolexempel* (2., [utökade] uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6.ed.). London: Routledge.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2000). *Att förstå barns tankar: metodik för barnintervjuer* (3., [omarb.] uppl.). Stockholm: Liber.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international conference for the psychology of mathematics education (*pp. 55-69). Japan: Nishiki Print Co.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation* (1. uppl.). Stockholm: Liber.

Justesen, L. & Mik-Meyer, N. (2011). *Kvalitativa metoder: från vetenskapsteori till praktik* (1.uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Kvale, S. (1997). *InterView.* Köbenhavn: Hans Reitzels Forlag.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (2.uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet: Lpo 94. (2006). Stockholm: Utbildningsdepartementet/Fritzes.

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: Lgr 11. (2011). Stockholm: Utbildningsdepartementet/Fritzes.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman: hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Nilsson, B. (2005). *Samspel i grupp*. Lund: Studentlitteratur.

Nilsson, B. & Waldemarson, A.-K. (1994). *Kommunikation: samspel mellan människor* (2., [bearb. och utök.] uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Niss, M. & Höjgaard Jensen, T. (Red.). (2002). *Kompetencer og matematiklaering: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Köbenhavn: Undervisningsministeriets forlag.

Pólya, G. (2003). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande.* (Print-on-demand). Stockholm: ePan.

Riesbeck, E. (2008). *På tal om matematik: matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen.* Diss. Linköpings universitet: Linköping Studies in Behavioural Science No. 129.

Runesson, U. (1995). Elever lär av varandra. I U. Runesson & B. Lendahls (Red.), *Vägar till elevers lärande* (s. 75-90). Lund: Studentlitteratur.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 129.

Rönnerman, K. (2004). Vad är aktionsforskning? I K. Rönnerman, G. Tornberg, U. Axėn, K. Bergström, E. Nyberg, Å. Söderström, L. Folkesson, A. Olin, J. Nylund, A. Eriksson, L. Westberg & J. Berlin (Red.), *Aktionsforskning i praktiken: erfarenheter och reflektioner* (s. 13-30). (1.uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik: utbildningens innehåll och ändamålsenlighet.* Skolinspektionens rapport 2009:5. Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket. (2003). *Lusten att lära: med fokus på matematik.* Skolverkets rapport nr 221. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003: huvudrapport svenska/ svenska som andra språk, engelska, matematik och undersökningen i årskurs 5: NU-03.* Rapport nr 251. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.* Stockholm: Fritzes.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv* (1. uppl.). Stockholm: Prisma.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällen till lärande.* Diss. Umeå universitet: Doctoral Thesis No. 39, 2007.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge, Mass.: Harvard U.P..

Vygotskij, L. S. (2001). *Tänkande och språk.* Göteborg: Daidalos.

Elektroniska dokument

Reys, B. J. & Reys, R. E. (1995). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. I *Nämnaren* nr 1 (1995) (s. 28-33). Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
Tillgänglig: http://ncm.gu.se/media/namnaren/fulltextpdf/1995/nr_1/2833_95_1.pdf

Runesson, U. (2000). Variation för lärande. I *Nämnaren* nr 2 (2000) (s.19-25). Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/media/namnaren/fulltextpdf/2000/nr_2/1925_00_2.pdf

Bilagor

Bilaga 1: Missivbrev till vårdnadshavare

Till vårdnadshavare för elever i år 3

Jag heter Karin Boman och läser sista terminen på lärarutbildningen mot grundskolans tidigare år vid Högskolan Väst. Under denna termin skriver jag examensarbete i matematik. Syftet är att studera hur elever kommunicerar tillsammans i grupp kring ett matematiskt problem. Detta är intressant att undersöka för att sedan som lärare ge elever möjlighet att utveckla denna förmåga. Vi planerar några undervisningstillfällen med mig och en mindre grupp elever, då eleverna filmas för att ta reda på hur de kommunicerar kring problemet. Även uppföljande enklare enskilda intervjuer med eleverna planeras – dessa filmas också – då de pratar med mig om hur de tänker kring problemet. Det filmade materialet får endast användas inom ramen för examensarbetet och kommer att ses av min handledare Cecilia Ottersten Nylund, mig och ev. ytterligare en lärare vid slutbedömningen. När hela arbetet är slutfört kommer filmmaterialet att förstöras. Samtliga elever, lärare och skolan kommer att presenteras anonymt i det färdiga examensarbetet. Vårdnadshavare eller elev kan när som helst avbryta elevens deltagande i undersökningen.

Utifrån de elever som får och vill vara med kommer vi att lotta ett urval. Vänligen fyll i talongen nedan och lämna till klassläraren senast måndagen den 19 november.

Om ni har frågor är ni välkomna att ringa mig, tel.: xxxx-xxx xx.

Tack på förhand!

Med vänlig hälsning
Karin Boman

Mitt barn får vara med i studien.

Ja Nej

Elevens namn: ___________________________________

Vårdnadshavares underskrift: ___________________________________

Bilaga 2: Elevintervjuguide

Roligt och spännande att få intervjua dig! Säga lite om vad det är tänkt att vi ska prata om och varför. Papper och penna till hands.

Berätta för mig om vad vi gjorde i problemet med handskakningar (utifrån dokumentationen)**!**

> **Vad hände när vi hade problemlösningen?**
>
> **Ser du något mönster i figuren** (du ritade)**? I så fall vilket/vilka?**
>
> **Ser du några geometriska figurer i figuren? I så fall vilken/vilka?**
>
> **Ser du något mönster i tabellen** (din tabell)**? I så fall vilket/vilka?**
>
> **Hur gjorde vi när vi löste problemet?**

Var det något mer du tänkte när vi gjorde det här?

(Vad tänker du om handskakningsproblemet?)

Hur tycker du det var att prata matematik så som vi gjorde i gruppen?

Tycker du att du kan berätta och beskriva (prata om) hur du tänker i matematik med hjälp av det du har ritat och skrivit? Mer om det?

Om det är något du inte förstår, är det lättare att en annan elev förklarar än att läraren gör det?

Är det lättare eller svårare att arbeta i matematik på egen hand tycker du?

Vilken matematik övade vi?

Vad har du lärt dig för något nytt i matematik tycker du?

Ta upp något av det viktigaste som kommit fram vid intervjun. Kommentarer från eleven.
Jag har inga fler frågor. Har du något mer att ta upp eller någon fråga?

Tack för att jag fick intervjua dig!

Bilaga 3: Händelseförloppet i Lektion 3

Funderat något sedan sist? Nej.
Tim ger förslag: mer än 41.
Jag säger att vi gjorde en enkel lista förra gången…
Tim ger förslag: 55. Jag skriver upp det.
Enkel lista för att försöka se ett mönster. Vi ritade också figurer för fem och sex personer. Vi ska försöka rita bilderna lite tydligare nu så att man ser tydligt. För att t.ex. kunna förklara för en klasskamrat eller sätta upp på väggen.
[…]
Eleverna ritar streck/linjer mellan **sex personer** lite finare med linjal. Jag ber dem rita personerna ganska glest. De ser samtidigt olika geometriska figurer och vi pratar lite om dem. Tim får först 14 och Henrik får det också till 14. Tim får sedan efter att själv tittat lite mer i sin figur 15 stycken. Simon får det till 14. Vi andra hjälper Henrik och Tim hittar en saknad linje så att det blir 15. Jag hjälper Simon till 15 stycken. Resultatet blir således för alla: 15. Sedan pratar vi lite om de geometriska figurer Simon sett i sin figur.

Tim säger att han glömt en och då får han rita in en linje till i sin figur. Han säger att han tror att det är 16. Han och jag räknar linjerna och vi får det till 15.

Vi pratar om några geometriska figurer igen som Simon sett. Vi letar efter nya figurer vi inte pratat om i Henriks figur och vi hittar några. Sedan ser vi i Tims figur vad han har hittat. Därefter kommer det till en person till och det blir **sju personer** totalt. Eleverna ritar linjerna för den nya person som tillkommer med en ny färg.

Tid 11:28

- ”Då kan man rita den litegrann vid sidan, om man tänker att den kommer här utifrån så. Och sen drar man raka streck. Ta gärna linjalen. Och så drar ni med en ny färg, så ser man jättetydligt vilka som tillkommer när en person kommer utifrån”, säger jag. ”Ta en tydlig färg så att det syns bra.”
- ”Det är inte säkert att det alltid ökar med såhär många” säger Tim.

Jag hör inte att han säger det eftersom Simon som sitter närmast mig samtidigt visar mig sin figur.

- Då kan du skriva hur många det blir denna gången. säger jag till Simon.
- Det blir 15, säger Simon.
- Det kommer sex till, säger Tim.
- 21, säger Simon.
- Ja, precis, Tim, det gör det, säger jag, eller…det kommer en person och det blir ju då…hur kan du uttrycka det? säger jag till Tim.
- Sex mera hälsningar.
- Ja! säger jag.
- Men så lägger vi till en till person, säger Tim.
- Då har du skrivit 21 där ja, säger jag till Simon. Det kan du också skriva i, säger jag till Henrik.

[…]

- Men kolla här, säger Tim, vi kan kolla, vi kan prova en till. Då kanske det blir mer än sex till eller? Då blir det väl sju till! Ja, nu fattar jag mönstret!!
- Gör du det? säger jag.
- Tar man till en till så blir det åtta. Sen tar man till en till så blir det nio mer… säger Simon.
- Precis, säger jag.
- Ja, nu fattar jag mönstret, säger Tim.
- Jahaa, säger Simon.
- Och om man då skulle ta en ytterligare, om den elfte personen kommer in så…
- Då blir det elva till, nej tio till, säger Tim.
- Tio till, säger Simon.
- Vad roligt! Nu har ni sett detta mönstret, förstått det. Vad är det som händer då mellan varje person som kommer till?
- Det blir *en* hälsning mer, säger Henrik.
- Jaa, säger jag. Plus…lika många, alltså skillnaden. Vi kan sätta upp det i en tabell, så ska vi se hur det blir.
- Nu har vi listat ut det, säger Tim.

[…]

- Nu har ni kommit fram till något jättebra här, säger jag.
- Vi har listat ut det, säger Tim.
- Ni har listat ut det, precis, säger jag. Ni ska få varsin sådan (delar ut en tom tabell). Ni vet, vi skrev en lista igår och nu kan vi skriva en tabell, kallas ju det för då. Jag har gjort en tabell som ni bara kan fylla i.
- Ska vi skriva en, två, tre, fyra, fem…? undrar Tim
- Ja precis. Så då skriver vi… Vi kan börja med en person kanske. Hur många handskakningar var det då?
- Då var det ju bara noll, säger Tim.
- Två - ett, tre - tre, säger Tim.
- Fyra – sex, säger Simon.
- Men här stämmer det ju inte riktigt… Jo, det stämmer, säger Tim.
- Ja vi fyller i tre –tre, ja och fyra blev sex. Och fem personer – hur många handskakningar var det?
- 14? säger Tim. 15?
- 16? säger Simon.
- 16? säger Tim.
- Ja 15, det var för sex personer. Vi kan hoppa över en rad så skriver vi sexan då. För sex personer var det 15. Precis. Kan ni då lista ut vad det var på fem?
- Tolv! säger Tim
- Tio? säger Simon.
- Tio ja, säger jag.
- Sen ritade ni nu den sista där. Hänger ni med? (jag kollar så att också Henrik hänger med)
- Sju då blev det ju…först blev det ju… säger Tim.
- 21, säger Simon.

- 15 och sen + 6, ja 21, säger Tim.
- 21, säger jag. Vad skriver vi först?
- 7 säger Tim.
- 7, precis, 21. Det är så långt vi har kommit.
- Åtta? Säger Tim
- Men vi kan lista ut, precis, Tim, vad är åtta då?
- Det måste vara 28.
- Ja bra, säger jag. Och nio, Henrik, vad tror du att nio blir då?
- Nej, jag vet inte.
- Nej, säger jag. Vi gör såhär… Vi kollar… Hur tycker ni vi ska rita bredvid tabellen här för att förstå mönstret?
- Nio blir ju 36! säger Tim.
- Ja det blir det, säger jag.
- Jag tänkte säga det, säger Simon.
- Och tio blir…45, säger Tim.
- Ja precis, säger jag.
- Och 11 blir 55! säger Tim.
- Ja, det är helt rätt. Men Tim, vet du vad… Jättebra! Vi kommer så småningom att komma fram till 16. Men innan dess vill jag att du förklarar för Henrik och Simon och mig hur du tänker. Hur ska man tänka, tycker du?
- Vad då? säger Tim.
- Nu när du räknar här nedåt… tio personer, elva personer, säger jag.
- Då tar man såhär: tolv, då tar man bort en, så 11 + 55. Sen tar man bort en från 13, 12 + ja, nu vad det blir. 66, ja, säger Tim.
- Ja. Förstår ni hur han tänker? frågar jag Henrik och Simon.

Båda skakar på huvudet.

- Nej, jag förstod inte, säger Henrik.
- Nej. Han sa att han tar bort en, t.ex. om vi går in på femman: vad händer mellan femman och sexan? säger jag. Om vi ökar med en person och ska skriva vad sexan är, då får vi tänka fem stycken för det är *en* mindre än antalet personer och så hade vi tio från början. Så menar Tim då, tio + fem. Och man kan ju också tänka så att från början var skillnaden ett och sen… Jag skriver en pil och talet ett för att visa att skillnaden mellan de två är ett. Tim, tittar du också här? Du löser vidare? Skillnaden mellan de två är ett …
- Skillnaden mellan de två är två, säger Simon. (Vi ser alltså vad som händer med antalet handskakningar i tabellen när antalet personer ökar.) Skillnaden mellan de två är tre. Skillnaden mellan de två är fyra.
- Jaa, säger Henrik.
- Skillnaden mellan de två är…, säger jag.
- Fem, säger Simon.
- Det var det som ni såg när ni gjorde de här figurerna. Skillnaden mellan de två?
- Sex, säger Simon.

För varje person som tillkommer skriver jag en pil och talet som står för skillnaden mellan antalet handskakningar bredvid tabellen.

- Så kan man också tänka, säger jag. Och sen går det uppåt. För att om ni ser i era figurer här…
- 136 är 17 personer och 120 är 16 personer, säger Tim.
- 120 stycken! säger Simon.
- Ja, det är helt rätt, säger jag. 120 gånger hälsar man om man är 16 personer – alla skakar hand med alla.
- Vad sa jag från början, sa jag 107? undrar Tim. Förra gången?
- Du sa 204 förra gången, säger jag, när du gissade. Men du hade ju också andra förslag; 125 och 122, tror jag.
- Det var nära, säger Tim.
- Ja, det var nära. Jättebra. Jättebra. Vad roligt! Kul att ni har kommit fram till det här. Vi kan titta så att alla förstår ordentligt så. Om ni tittar på era figurer. Hur kan man tänka när det kommer en till; hur många det blir? Om det kommer en sjunde här ska han hälsa åtta gånger? säger jag.
- Ja, säger Henrik.
- Nej, sex, säger Simon.
- Och varför sex, varför inte sju? undrar jag.
- För att det är bara sex andra, inte sju andra, säger Simon.
- Jaa, säger Henrik och Tim nickar.
- Ja precis, det är sex andra. Så går vi in i tabellen och ser vad som händer mellan sexan och sjuan. Sexan då har ni 15, och vad händer till sjuan, hur mycket lägger man till där, Henrik? Mellan sexan och sjuan på antalet handskakningar? Om du tittar där, där är det 15 när det är sex personer. Om det kommer en sjunde, som i figuren ni gjorde, hur många fler handskakningar blir det? Vad är differensen där?
- Sex, säger Henrik.
- Sex, ja precis, säger jag. Och då alltså; en sjunde person och det blir ytterligare sex handskakningar. Varför blir det så då? Är du med på det? frågar jag Henrik. Varför hälsar inte den sjunde personen sju gånger? Eller fem?
- För den kan ju inte hälsa på sig själv, säger Tim.
- Nej precis, säger jag.
- Det skulle bli såhär, säger Simon och visar.
- Jo det går, säger Henrik och visar.
- Ja det *går* ju, men…, säger jag.
- Här har vi sex personer, det kommer en sjunde (jag visar i en ritad figur). Han hälsar på den, på den, på den , på den, på den, på den… Alltså…sex gånger. Så kommer det en ny person så måste han ju hälsa på alla de andra, men inte på sig själv! Är det svårt?
- Ja, säger Henrik.
- Ganska, säger Simon
- Nej, men jag fattar…säger Tim.
- Men om vi säger att det är 19 personer på en fest och så kommer det en tjugonde. Hur många gånger ska den tjugonde hälsa?
- 19, säger Simon.
- Är du med på det? säger jag till Henrik.

- Ja, säger Henrik.
- Ser han 19 personer på festen och han ska gå fram och hälsa på alla, så blir det 19.
- Fast de är 20 personer, säger Tim.
- Ja just det, säger jag.

  […]
- Men nu har vi listat ut det! säger Tim.
- Ja nu har ni listat ut det, säger jag.

  Tid 25:23

Därefter pratar vi om produkten 19 · 20, som Simon nämnt tidigare och hur man bör arbeta vidare med den för att nå ett resultat. Vi diskuterar att man ska ta hälften av produkten för att få antalet handskakningar.

Tim visar sedan att han har fått resultatet 190 stycken för 20 personer. Därefter fortsätter vi andra att skriva vidare i våra tabeller. Jag säger att vi kan nöja oss med antalet handskakningar för 13 personer, men Simon och Henrik fyller på sina tabeller med några värden till med hjälp av Tim och då fyller jag också i några till.

Vi talar sedan om hur man ska titta efter mönster i tabellen – att man i detta fall ska göra det lodrätt och inte vågrätt. Tim tar upp att skillnaden ökar med ett för varje person som tillkommer. Henrik menar att antalet personer också är ordnade enligt ett mönster; en, två, tre, fyra… Simon visar att talet för antalet handskakningar är jämnt, ojämnt, ojämnt, jämnt, jämnt, ojämnt, ojämnt …

Vi jämför också figuren med tabellen – att de stämmer överens i de delar de är gemensamma.

[…]

Sedan visar jag eleverna i en tabell över antalet personer och antalet handskakningar hur man kan skriva skillnaden mellan varje person som tillkommer med en pil och ett tal bredvid tabellen, så som vi gjort tidigare. (Därefter ser vi hur man med hjälp av tabellen också kan se ett annat mönster.) Jag säger att istället för att tänka efter varje gång när man nått lite högre tal kan man använda sig av mönster i tabellen för att räkna ut resultat. Vi konstaterar att det finns många sätt att se problemet på och att lösa det.

Jag säger att det är jätteroligt att eleverna har förstått så mycket av problemet och att de har upptäckt mönstret. Jag frågar dem vad de har lärt sig för matematik i den här problemlösningsuppgiften. De säger att de har lärt sig mönster och att de övat multiplikation, addition, division, men inte decimalform!

Jag säger att det har varit jätteroligt att göra detta med eleverna och att de kom fram till det här. Jag säger också att vi nu har sett mönstret på många olika sätt och de har gjort jättefina figurer och tabeller.

Tid 43:05

Högskolan Väst
Institutionen för individ och samhälle
461 86 Trollhättan
Tel 0520-22 30 00   Fax 0520-22 30 99
www.hv.se