# Lösningsstrategier vid tiotalsövergångar inom addition och subtraktion

**- En studie av elever i år två**

**Malin Bouweng** **Sara Enetorp** **Emma Johansson**

**Handledare: Patrik Lundström**

**Examensarbete 10 p**
**Utbildningsvetenskap 41- 60 p**
**Lärarprogrammet**
**Institutionen för individ och samhälle**
**Höstterminen 2007**

Arbetets art: Examensarbete 10 poäng, Lärarprogrammet
Titel: Lösningsstrategier vid tiotalsövergångar inom addition och subtraktion – En studie av elever i år två
Engelsk titel: Solution strategies for addition and subtraction problems with emphasises on tentransitions – A study of pupils in year two
Sidantal: 34
Författare: Malin Bouweng, Sara Enetorp och Emma Johansson
Handledare: Patrik Lundström
Examinator: Lena A. Nilsson
Datum: 07-11-07

---

## Sammanfattning

Bakgrund Under kursen didaktisk matematik blev vi nyfikna på att ta reda på vilka lösningsstrategier vid tiotalsövergångar elever som nyligen trätt in i matematikens värld använder sig av. Neuman (1993) skriver att abstrakt tänkande om tal börjar med konkreta handlingar. Piaget (1972) menar att barns egna sätt att lösa matematiska uppgifter ofta stämmer överens med de abstrakta begrepp som läraren försöker lära eleverna. Som lärare bör man därför låta eleverna själva upptäcka matematiken och utforska på egen hand. Neuman (1993) menar att man, för att kunna utföra beräkningar över tiotalsgränser, bör kunna de 25 talkombinationer som de tio första talen består av. Vi undersöker vad forskning säger om olika hjälpmedel såsom fingerräkning och miniräknare. Vi har även tittat närmare på vilka strategier andra forskare funnit att elever använder samt några av de svårigheter elever kan ha vid huvudräkning och vad de kan bero på.

Syfte Syftet med vår studie är att upptäcka vilka lösningsstrategier som elever i år två använder sig av vid tiotalsövergångar i addition och subtraktion och hur effektiva dessa är.

Metod Vi har valt att använda oss av kvalitativa intervjuer som datainsamlingsmetod. Vi har intervjuat 15 elever från tre olika skolor. Eleverna fick lösa 20 uppgifter, tio inom addition och tio inom subtraktion, av ökande svårighetsgrad. Av dessa 20 är tolv uppgifter beräkningar över tiotalsgränser. Det är dessa tolv vi fokuserat på i vår studie. Utifrån vårt syfte och våra frågeställningar har vi analyserat elevernas svar. Vid vår kategorisering av elevernas svar har vi använd oss av Ahlbergs (1992) och Ostads (1999) kategoriseringar av vanliga lösningsstrategier.

Resultat Vid vår analys har vi funnit att, av de lösningsstrategier som eleverna använt sig av i vår studie, är omgestaltning av talen den mest effektiva. Vid denna strategi behöver få elever använda sig av hjälpmedel såsom fingrar, papper och penna eller konkret material. Däremot behöver många av eleverna som använder sig av lösningsstrategierna uppräkning på talsekvensen vid addition och minskningsstrategin vid subtraktion ta hjälp av konkret material vid de mer avancerade uppgifterna. Dessa strategier är därför mindre effektiva.

# Inledning

I kursen *Didaktisk matematik* (Högskolan Väst, ht -06) lärde vi oss vilka lösningsstrategier som elever använder vid addition och subtraktion. Efter denna kurs har vi reflekterat kring dessa strategier och deras effektivitet. Efter att ha diskuterat detta ämne har vi blivit intresserade av att undersöka vilka lösningsstrategier som elever i grundskolans tidigare år använder sig av och hur effektiva dessa är.

I diskussioner i dagens samhällsdebatt kan man ibland höra att dagens elever presterar sämre och har sämre kunskaper i matematik än tidigare. Enligt TIMSS 2003 (Trends in International Mathematics and Science Study) presterar svenska elever under det internationella genomsnittet bland annat inom kunskapsområdet aritmetik, läran om de fyra räknesätten. Vi har funderat över vad detta kan bero på. Är eleverna inte utrustade med bra och effektiva strategier att lösa dessa uppgifter?

Det är viktigt att, som pedagog, tidigt uppmärksamma om en elev använder sig av en mindre effektiv lösningsstrategi för att så tidigt som möjligt hjälpa eleven att komma ur detta mönster och finna en mer effektiv lösningsstrategi. Om man upptäcker att en elev har fastnat i ett ”räkna uppåt” (börja från ett) tänkande är det lättare att hjälpa eleven att utveckla denna strategi till att, exempelvis, räkna störst först. Strategin att börja från ett kan fungera vid enklare uträkningar som 3+4, men blir mer komplicerad och tidskrävande vid mer avancerade matematiska problem 38+43.

Vilka strategier är då effektiva? Detta vill vi, genom vår studie, upptäcka genom att undersöka vilka strategier de elever använder som har en korrekt lösning på de uppgifter vi låter dem pröva på. Vi vill på detta sätt se om någon lösningsstrategi används mer frekvent vid korrekt lösning än någon annan.

## Syfte och frågeställningar

Syftet med vår studie är att upptäcka vilka lösningsstrategier som elever i år två använder sig av vid tiotalsövergångar i addition och subtraktion och hur effektiva dessa är. Vårt syfte utmynnar i fem frågeställningar:

- Vilka lösningsstrategier använder eleverna vid tiotalsövergångar i addition?
- Vilka lösningsstrategier använder eleverna vid tiotalsövergångar i subtraktion?
- Vilka av dessa lösningsstrategier använder de elever som löser uppgifterna korrekt?
- Vilka av dessa lösningsstrategier använder de elever sig av som löser uppgiften felaktigt?
- Är någon av dessa strategier mer effektiv?

## Definitioner av begrepp

Vi kommer här att definiera de begrepp som vi använder i vår studie, vårt syfte och vid vår analys.

Med begreppet *lösningsstrategi* menar vi vägar/sätt att nå rätt svar på ett matematiskt problem.

Begreppet *symbolspråk* syftar till de symboler som används i matematik, siffror och tecken som exempelvis +, - och =.

När vi nämner begreppet *tiotalsövergångar* menar vi additioner och subtraktioner där beräkning över/under tiotalsgräns utförs, exempelvis 33+8.

Vid begreppet *effektiva lösningsstrategier* har vi valt att utgå från Ahlbergs (1992) tolkning. Hon menar att de effektiva lösningsstrategierna är de som är mest utvecklingsbara. Vi har därför tolkat att de strategier där eleverna klarar svårare tal utan att använda hjälpmedel, är de mest effektiva lösningsstrategierna.

Begreppet *tal* innebär i vår studie siffror, så som till exempel 23, 2 och 15. Med begreppet *uppgifter* menar vi matematiska problem som måste lösas med aritmetik, exempelvis .15 +9, 12-7.

Med begreppet *benämnda uppgifter* menar vi uppgifter där eleven läser sig till den uppgift som ska lösas, alternativt får uppgiften uppläst. Exempelvis 5+2: Pelle plockar 5 kottar och får sedan 2 till av Lisa. Hur många kottar har Pelle då? De uppgifter som endast består av siffror och symboler har vi valt att benämna som *aritmetikuppgifter*.
Begreppet *uppställning* innebär i vår studie en algoritm. Enligt Löwing & Kilborn (2003) är en algoritm en uträkning av ett matematiskt problem efter ett på förhand bestämt mönster. Strategin visuella bilder av en uppställning innebär således att eleven löser uppgiften genom att, i tanken, visualisera den traditionella algoritmen uppställning där två tal ställs över vartannat.

# Bakgrund

I detta avsnitt kommer vi att redogöra för den tidigare forskning som ligger till grund för vår studie. Vi kommer här att titta närmare på olika teorier för lärande, arbetssätt, symboler i matematik, lösningsstrategier och matematiska svårigheter.

## Teorier om grundläggande taluppfattning

Enligt Piaget måste man ha vissa insikter och förmågor att tänka på för att kunna förstå något. Det vill säga: för att kunna förstå de fyra räknesätten måste man kunna addera, subtrahera, multiplicera och dividera och även ha insikter om att talen består av delar och hur dessa delar är relaterade till varandra. För att kunna göra detta måste man utveckla en förmåga att tänka abstrakt. Ett barns tänkande utvecklas, enligt Piaget i etapper. Det abstrakta tänkandet börjar, enligt Piaget, ta sin form när barnen är 7 - 8 år. För att ett barn ska kunna utveckla det abstrakta tänkandet, som den matematiska förståelsen kräver, förutsätts att barnet behärskar ett mera konkret och enkelt tänkande. Detta tänkande är kopplat till upplevelser och konkreta handlingar (Neuman, 1993). Piaget (1972) menar dock att det finns elever med fallenhet för abstrakt tänkande medan andra elever behöver tänka mer konkret och experimentellt.

Neuman (1993) skriver att abstrakt tänkande om tal börjar med konkreta handlingar. Genom konkreta handlingar upptäcker vi strukturer och mönster i talens relationer till varandra, del-helhetsrelationer, efterhand blir de konkreta föreställningar och detta leder till mer diffusa och tänkandet blir mer abstrakt. Tillslut ”vet” man bara att vissa tal ”hör ihop”, men man vet inte längre varför. Trots att t ex talen 7, 8, 9 en gång varit knuta till föreställningar om grupperade antal, har vi svårt att svara på frågan: ”vad är 7?”. Vi tänker inte på 7 som 5+2 eller 4+3. Övergången från konkret till abstrakt tänkande går inte över en natt. De elever som inte längre minns varför 10-7=3 har börjat lämna det konkreta tänkandet om tal och börjat närma sig det abstrakta tänkandet.

Elevens förståelse för grundläggande matematik bygger på att han/hon först kan skapa kvalitativa och konkreta strukturer. Det är viktigt att hjälpa eleven att bygga upp denna grundläggande struktur. Ju mer man underlättar denna grund, desto lättare får eleven att senare utveckla förmågan att göra logiska operationer inom matematik. (Piaget, 1972)

Piaget (1972) anser att intelligensen och de kognitiva strukturerna är konstruktivistisk, det vill säga varken är något enbart utifrån påverkat eller en medfödd, inifrån påverkan. Dessa två faktorer, påverkan utifrån och inifrån, påverkar båda intelligensen och tänkandet ömsesidigt och växelvis. Detta innebär att man, i undervisningen, bör lägga stor vikt på barnets spontana handlingar. Enligt konstruktivismen kan man inte lära någon något genom att ”tala om” eller demonstrera hur det fungerar. Det är individen själv som konstruerar den kunskap som han/hon har behov av och möjlighet att ta till sig (Neuman, 1993). Detta kräver att man, som lärare, vågar ta ett steg tillbaka och låta eleverna själva pröva sig fram och skapa sin egen kunskap genom att laborera. Piaget (1972) menar att forskning visat att de tankeoperationer som eleven själv spontant använder ofta överensstämmer med de abstrakta begrepp som läraren försöker lära eleven genom föreläsningar. Vid 7-8 år upptäcker eleven, på egen hand, hur addition och subtraktion fungerar. Undervisning bör, enligt Piaget, gå till på så sätt att läraren talar matematik till eleven på elevens sätt med elevens egna språk, innan man inför det färdiga och abstrakta matematikspråket. Man bör sträva efter att låta eleven återupptäcka matematiken istället för att lyssna och upprepa. Eleven bör producera egen kunskap, istället för att reproducera ”färdig” kunskap. (Piaget, 1972)

## Arbetssätt

Ett vanligt påstående av utbildningsforskare är att elevernas framgång eller misslyckande beror på lärarens val av metod. Både Kühnel och Skinner menar att människors svårigheter för matematik beror på skolornas ineffektiva läroplaner och lärandemetoder. Detta innebär att man inte enbart kan lägga skulden för en elevs misslyckande i matematik på eleven själv. Enligt dessa forskare bör en del av skulden läggas på skolorna och lärarnas undervisningsmetoder (Ekeblad, 1996). Detta menar även Piaget. Han anser att de elever som man anser har fallenhet för matematik framförallt har detta för att de kunnat anpassa sig till den undervisning som använts. De ”dåliga eleverna” som misslyckas i matematik, skulle antagligen ha lyckats om de fått leta sig fram till lösningar på andra sätt än de som undervisningen tillåtit. Det dessa elever inte förstår är alltså i själva verket lektionerna. Detta kan bero på att man, i undervisningen, alltför hastigt gått från att behandla den kvalitativa, konkreta och logiska strukturen i matematiken där eleverna får föra logiska resonemang kring matematik, till den kvantitativa, abstrakta och matematiska strukturen där eleverna lär sig redan utarbetade formler utantill. Piaget önskar att fler lärare slutar vara föreläsare och ge eleverna färdiga lösningar på problem och istället börjar stimulera eleverna att utforska och lära på egen hand (Piaget, 1972).

Enligt Magne (1998) ser många att skolmatematikens huvuduppgift är att förmedla räknefärdighet och instruera om alla räknesätt. Magne menar även att man kan se skolmatematikens mål som att handleda eleverna till att utveckla abstrakt och helhetsinriktad problemlösning. Ett av strävansmålen i kursplanen för matematik innebär att eleven utvecklar sin förmåga att använda logiska resonemang samt argumentera för sitt tänkande. Man kan även läsa att undervisningen i matematik ska ge eleven möjlighet att kommunicera matematik i meningsfulla situationer för att finna lösningar på nya problem (Skolverket, 2000).

Löwing & Kilborn (2003) menar att det är viktigt att ta hänsyn till och tänka utifrån två perspektiv när man ska undervisa i huvudräkning: dels ska man föra samtal med eleverna om vilka strategier man kan använda sig av och dels ska man arrangera individuella tillfällen då eleverna kan praktisera dessa teorier. Även Ahlberg (1992) menar att kommunikation med och mellan elever samt tillfällen för eleverna att uttrycka sig runt problemlösning är en viktig del för att klargöra elevernas förståelse. Elevers ord och handlingar visar på deras förståelse.

## Matematiska symboler

Olsson (2000) skriver att skolan idag alltför tidigt inför det matematiska symbolspråket. Detta kan bero på att eleverna och elevernas föräldrar förväntar sig detta. Vid skolstarten har inte alla elever nått den nivå för att kunna tänka abstrakt som krävs för att kunna förstå och tolka detta språk. Ett tidigt införande av symbolspråket kan därför leda till svårigheter för en del elever. Även Unenge, Sandahl & Wyndhan (1994) menar vissa elever kan slås ut av ett tidigt införande av matematiska symboler. Han menar att matematik är ett skolämne där man tydligt kan se skillnader i kunskaper och färdigheter hos elever. Denna typ av utslagning kan leda till att elever upplever ”matematikångest”. Enligt Unenge är matematik och det matematiska symbolspråket mycket teoretiskt och han menar att detta kan ha ett samband med elevernas matematiksvårigheter. Høines (2000) menar att innan införandet av symbolspråket bör eleverna få uppleva och uttrycka matematik på sitt eget sätt och med sitt eget språk. Detta språk strävar sedan mot det formella matematikspråket. Målet är att eleven ska känna att det formella matematikspråket är deras.

Høines (2000) menar att vissa elever har svårt med att skriva en angiven siffra. Det behöver inte betyda att eleven inte förstår innebörden av talbegreppet. Elever kan förstå mängden av tal i vardagliga situationer men kan ha svårt att förstå det matematiska symbolspråket. Enligt Høines har dessa elever språkproblem, inte matematiksvårigheter.

## Hjälpmedel

Som hjälp vid lösning av aritmetikuppgifter har elever i huvudsak tillgång till tre slags hjälpmedel: tekniska hjälpmedel, konkret material och fingrar. Vi beskriver nedan kort dessa kategorier. I uppsatsen kommer vi dock att fokusera på de två sistnämna kategorierna.

### Tekniska hjälpmedel

De tekniska redskapen, miniräknare och datorer, är idag vanliga hjälpmedel i skolorna. Dessa kan ta över räknandet i grundläggande aritmetik. Påståendet att skolans viktigaste uppgift är att lära eleverna läsa, skriva och räkna blir därför inte längre relevant. En vanlig tanke kring användandet av miniräknare i skolan är att elevernas kunskaper i matematik skulle bli sämre om användande av miniräknade tillåts tidigt i undervisningen. Enligt Unenge (1994) tyder studier, tvärtom, på att elevernas kunskaper förbättras om de lär sig att utnyttja miniräknare på rätt sätt.

### Konkret material

Malmer (2002) menar att det finns olika typer av konkret material för olika syften. Centimo-materielet är ett exempel på de material som kan användas för att konkretisera tal- och taluppfattning. Malmer kallar detta för strukturell materiel. Centimo-materielet används främst för att belysa positionssystemet. En laborationssats består av hundra entalskuber, tjugo tiotalsstavar, tio hundraplattor och en tusenkub.

Användning av konkret material leder lättare, enligt Malmer, till förståelse av matematiska begrepp. Hon menar även att elever med matematiska svårigheter finner det roligare att arbeta mera konkret, vilket tänjer på deras koncentrationsförmåga.

Andra exempel på konkret material är pengar, pärlor, stenar, kapsyler med mera. Detta kallar Malmer (2002) för diverse plockmaterial. Dessa kan användas för att konkretisera klassificering, sortering och jämförelse.

### Fingerräkning

Ahlberg (1992) skriver att när elever använder fingrarna som hjälp vid problemlösning räknar de dels ett finger i taget, dels grupperar de några fingrar så att de tillsammans bildar ett tal.

*1. Räkna ett finger i taget.*
Eleverna använder fingrarna för att räkna på talsekvensen. De låter ett finger i taget representera ett tal. De använder sig av antingen höger eller vänster hand och ibland båda.

Ett sätt de kan använda sig av när de räknar på fingrarna är uppräkning från början. Vid denna strategi håller barnen ordning på talen genom att låta varje finger representera ett tal. De gör då en uppräkning från början och räknar det antal fingrar som behövs till första addenden och sedan den andra. Efter detta räknar de samman alla fingrar.

Ett annat sätt eleverna kan använda sig av är uppräkning från det första talet. Vid denna strategi räknar barnen från det första talet och lägger till det antal som anges i det andra talet.

Ett tredje sätt är uppräkning från det största talet. Barnen räknar vid denna strategi upp från det största talet i additionen. Denna strategi undervisar många lärare då det förenklar beräkningar.

*2. Gruppera fingrarna och se strukturer.*
Ibland grupperar eleven de båda tal som ska adderas och, utan att göra en uppräkning av fingrarna, ser sedan summan av additionen. Exempel: 3+4, 3.. 4.. 7 (Ahlberg, 1995).

## Lösningsstrategier

Ahlberg (1992) menar att elever ofta kombinerar fingerräkning, huvudräkning och skriftliga anteckningar när de gör beräkningar. Eleverna går till väga på många olika sätt när de adderar i huvudet. Uppgifternas aritmetiska struktur, formulering och det numeriska innehållet är faktorer som påverkar hur varje enskild elev tänker.

Enligt Neuman (1993) är en viktig beredskap för att klara beräkningar över tiotalsgränsen att kunna de 25 kombinationer som de tio första talen består av. Kan man dessa del-helhets relationer, har man även en god beredskap att kunna se del-del-helhetskombinationer inom större tal. Om en elev ska lösa uppgiften 8+5=_ är det en god fördel att kunna ”se” att talet fem består av delarna 2+3. Eleven kan då se uppgiften som 8+2+3= 10+3= 13. Samma strategi kan användas vid subtraktionen 13-5=_, där eleven först tar bort delen 3 sedan delen 2, 13-3-2= 10-2= 8. Den viktigaste förutsättning för att elever ska lära sig de fyra räknesätten är alltså, enligt Neuman, att de vet och förstår hur de 10 första talen kan delas upp och sättas samman. Har man denna beredskap blir addition och subtraktion inom högre talområden lättare, eftersom dessa bara är variationer av addition och subtraktion inom talområdet 1-10 eller uppdelningar av dessa tal.

Threlfall (2002) skriver om flexibilitet vid huvudräkning. Med det menar han förmågan att se vilken strategi som lämpar sig bäst för en uppgift. Threlfall menar också är det ett vanligt antagande att man når flexibilitet genom att presentera ett antal olika lösningsstrategier och sedan tala om för eleven vilken strategi som lämpar sig bäst för vilken uppgift. Detta anser han hämmar elever att utveckla sitt flexibla tänkande. Han menar att man istället ska lära eleverna att se talen som en del-helhets relation.

## Algoritmer

Enligt Löwing & Kilborn (2003) är en algoritm en uträkning av ett matematiskt problem efter ett på förhand bestämt mönster. Algoritmer var nödvändiga verktyg för att kunna utföra mer komplicerade aritmetiska uppgifter innan dagens miniräknare fanns att tillgå. Eftersom algoritmkunskap var så nödvändig ägnades stor del av skolornas matematik undervisning åt att öva algoritmer. Tanken var att denna övning skulle leda till att alla elever då skulle klara av beräkning med algoritmer snabbt och enkelt. Detta lyckades inte alltid enligt Löwing & Kilborn. Anledningen till skolornas undervisning inte alltid lyckades var att elevernas övande på algoritmer enbart ledde till att de lärde sig hur de skulle beräkna, men de saknade en förståelse för vad de gjorde. Löwing & Kilborn (2003) menar att algoritmer är överflödiga eftersom de anser att det räcker att behärska huvudräkning, även för att kunna beräkna mer komplicerade matematiska problem. Ahlberg (1992) studie visade bland annat att elever ibland tar till algoritmer vid enkla uppgifter, där huvudräkning skulle vara ett möjligt alternativ. Även hon menar att algoritmer kan undvikas genom att eleven lär sig effektiva och utvecklingsbara lösningsstrategier.

## Huvudräkning

En förutsättning för att kunna utvecklas inom huvudräkning är att man har goda kunskaper i grundläggande addition och subtraktion (Löwing & Kilborn, 2003). För att ytterligare kunna utveckla huvudräkning vid addition krävs även att man förstår och kan använda sig av den kommutativa och associativa lagen. Den kommutativa lagen innebär att a+b=b+a, alltså 2+9=9+2. Den associativa lagen innebär att (a+b)+c= a+(b+c). Har man en förståelse för denna regel blir det lättare att lösa uppgiften 58+23+77= med huvudräkning. Uppgiften kan, för att hålla så få delmoment som möjligt, beräknas som (58+23)+77 = 58+(23+77) = 58+100 = 158. Löwing & Kilborn betonar även att huvudräkning är mer än att bara ge smarta svar på beräkningar. Det är även en viktig del för att kunna utveckla sitt matematiska tänkande för mer avancerad matematik.

För att en elev ska kunna förstå och använda subtraktion är det, enligt Neuman (1993), nödvändigt att eleven kan de tre följande strategierna:

*Räkna uppåt*
98, 99, 100

*Räkna neråt*
31, 30, 29

*Jämföra*
201 är ett steg upp och 198 är två steg ner från 200

Dessa strategier blir en grund som sedan utvecklas till mer effektiva strategier. I sina studier av elever med svårigheter för matematik har Neuman (1993) funnit att de eleverna med matematiksvårigheter fastnat vid användning av någon av dessa tre sätt när de löste matematiska uppgifter och således inte utvecklat sitt matematiska tänkande.

I sin studie av elever i år tre fann Ahlberg (1992) att många elever saknar en effektiv beräkningsmetod för huvudräkning. För att eleverna ska kunna utveckla sina beräkningsmetoder vid huvudräkning är det viktigt att eleverna lär sig huvudräkningsstrategier som är utvecklingsbara. De vanligaste strategier som eleverna i Ahlbergs studie använde sig av var:

*Uppräkning på talsekvensen.*
Eleverna räknar upp på talsekvensen i huvudet. Det är ovanligt att elever gör detta utan att använda fingrarna eller markerar antal på något annat sätt, huvudnickningar eller knackningar i bordet. Eleverna utgår från första eller största talet.

*”Inlärda talfakta.”*
Vid denna strategi har eleverna lärt sig ”talkamrater” och utnyttjar detta vid huvudräkning. De har då lärt sig och vet att exempelvis 5+6 är 11. Det är vanligast att eleverna kan talfakta inom talområdet ett till tio.

*Tiotal och ental beräknas var för sig.*
Eleverna beräknar tiotal och ental var för sig på varierande sätt. Ibland adderas tiotalen först och entalen senare och ibland vice versa, beroende på problemets numeriska innehåll.

*Visuella bilder av en uppställning.*
Eleverna har en inre bild av talen i en uppställning. Algoritmen beräknas i huvudet på samma sätt som om de ställt upp den på papper.

*Användning av ”dubblor”.*
Elever har lättare att lära sig ”dubblorna” än någon annan talfakta. Ofta utgår eleverna från dessa dubblor när de utför beräkningar i huvudet. Till exempel 8+8=16 eller 5+5=10.

*Omgestaltning av talen.*
Vid denna strategi tänker eleverna i talkombinationer och omgestaltar talen. Till exempel vid uppgiften 8+4=8+2+2=10+2=12.

Enligt Ahlberg (1995) är den strategi som är mest effektiv och mest utvecklingsbar omgestaltning av talen. Med hjälp av denna strategi kan eleverna tänka i olika talkombinationer, vilket kan motverka att eleverna undviker att ställa upp och använda sig av algoritmer vid enkla beräkningar som de kan utföra med huvudräkning. Unenge (1999) menar att man vid huvudräkning måste vara öppen för att använda sig av flera olika strategier. Han menar att man inte ska låsa sig vid att det enbart finns <u>en</u> bra och smart lösningsstrategi för varje uppgift. Detta beskriver även Löwing och Kilborn (2003). Vid huvudräkning gäller det att välja den lösningsstrategi som man anser vara mest lämplig och minnessparande. De menar att denna lösningsstrategi varierar från uppgift till uppgift.

Ostad (1999) har kategoriserat de vanligaste räknestrategierna som används vid addition och subtraktion specifikt.

<u>Uppgiftsexempel: 3 + 5 = ?</u>

*Strategin att räkna allt och sedan börja från början igen*
Eleven räknar varje led för sig. Först 1, 2, 3 och sedan det andra ledet: 1, 2, 3, 4, 5. Därefter börjar barnet från början igen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

*Strategin att räkna allt*
Eleven räknar 1, 2, 3 och fortsätter sedan med 4, 5, 6, 7, 8.

*Strategin att fortsätta räkna*
Eleven fortsätter att räkna från det först av de två talen: 4, 5, 6, 7, 8.

*Minimumstrategin*
Eleven räknar vidare från det tal som är störst. I vårt exempel från fem: 6, 7, 8.

Vid dessa fyra strategier använder sig eleverna oftast av konkreta hjälpmedel såsom fingrar, pennor, leksaker och liknande. Det finns också räknestrategier där barn inte använder konkreta hjälpmedel:

*Strategin med prickar som talsymboler*
Eleven ritar/tänker sig prickar eller streck för varje tal, och räknar sedan antalet prickar/streck.

*Siffernamnsstrategin*
Eleven räknar högt eller tyst för sig själv där man ser hur eleven rör läpparna. I övrigt har räkningen ingen annan direkt observerbar yttre referensram.

Eleverna använder sig även av strategier där räkning kombineras med det faktum att eleven minns vissa kombinationer. Ett exempel på detta är tvillingstrategin:

*Tvillingtalstrategin*
Eleven vet att 3 + 3 = 6 och säger: tre plus tre är sex… plus två… sju, åtta.

<u>Uppgiftsexempel: 5 – 3 = ?</u>

*Strategin att räkna allt och sedan börja från början igen*
Eleven räknar 1, 2, 3, 4, 5. Barnet utgår från denna mängd och räknar sedan bort 1, 2, 3. Och räknar sedan det som blir kvar.

*Tillväxtstrategin*
Eleven utgår från talet 3 och räknar sedan framåt: 4, 5.

*Minskningsstrategin*
Eleven utgår från talet 5 och räknar baklänges: 4, 3, 2.

Vid dessa strategier använder sig eleverna ofta av konkreta hjälpmedel. Dessa strategier kan användas tillsammans med strategierna prickar/streck, siffernamnsstrategin, förmågan att minnas vissa kombinationer.

## Matematiska svårigheter vid addition och subtraktion

När man frågar en elev ”Hur mycket är 3+2”? kan man snabbt få svaret fem och på frågan "varför”? få förklaringen att eleven bara vet det. Man kan då säga att denna addition finns lagrad i elevens långtidsminne (LTM). Alla människor har olika kapacitet i LTM, men de flesta har i detta minne en stor mängd faktakunskaper. Här ryms historiska årtal, adresser, telefonnummer och mycket annat. Frågar man istället eleven vad 43+12 är, finns sannolikt detta inte lagrat i LTM. För att lösa detta problem får eleven använda sig av huvudräkning och då ta hjälp av korttidsminnet (KTM). Hjärnan använder både LTM och KTM. Ur LTM hämtar man att 4+1=5 och därmed 40+10=50. Detta tal lagras i KTM, sedan hämtar man 2+3=5 ur LTM, för att addera 50+5 i KTM och finna svaret 55. Forskning visar att en människa klarar av att hålla 5 till 9 beräkningar i KTM. Saknar eleven effektiva huvudräkningsstrategier som innebär få deluppgifter att hålla i KTM samtidigt, kan huvudräkningsuppgiften bli besvärlig för eleven. Om vi, i en vardagssituation, upptäcker att vi inte klarar av att lösa ett problem med huvudräkning och KTM, tar vi ofta spontant fram ett yttre minne – papper och penna. Vi kan då anteckna delmoment av problemlösningen, för att på så sätt avlasta KTM (Magne, 1998).

I en studie av huvudräkningsförmågan hos elever i år fem fann man, vid additionen 39+13, att många elever hade svårigheter vid tiotalsövergångar (Unenge, 1999). Det var vanligt att eleverna svarade att 9+3=12, vilket ger uppgiften svaret 412. Enligt Unenge berodde detta på att eleverna tänkte sig uppgiften som algoritmen uppställning, där de fick svårigheter att hålla reda på de minnessiffror som kommer till vid tiotalsövergångar. Även vid tiotalsövergångar vid subtraktion hade eleverna vissa svårigheter. Vissa elever som använde fingrarna som hjälpmedel var osäkra på om de, vid subtraktionen 26-19, skulle börja räkna ner från 25 eller 26.

Enligt Magne (1998) är benämnda uppgifter mer komplicerade än aritmetikuppgifter. Vissa elever kan fastna i en rigiditet i tänkandet som leder till att eleven inte löser textuppgifter korrekt. En elev som fastnat vid att fokusera på siffror i en textuppgift, läser inte vad som ska lösas i problemet, utan utför den matematiska operation som eleven tror avses. Detta är ett tecken på att eleven har fastnat i rigid tänkande. En annan typ av rigidhet är när eleven fastnar i att lösa alla uppgifter av samma typ, exempelvis addition, på samma sätt. Detta rigida tankesätt kan vara riskabelt för elevens fortsatta matematiska utveckling om det hindrar eleven från att utveckla nya och alternativa lösningsstrategier (Magne, 1998).

En förklaring till att elever fastnar i rigida tanke- och handlingsmönster kan, enligt Magne (1998), vara att undervisningsformen är rigid. Synsättet att all övning leder till lärande stämmer inte enligt Magnes studier. Många läromedel i matematik är fyllda av långa serier av samma uppgifter där eleven mekaniskt tränar upp sina matematiska färdigheter. Dessa metoder kan leda till att barnen lär sig det som Magne kallar ”grodor”. Grodor kan beskrivas som att eleven tänker rätt, men lärt sig fel. En groda kan tillexempel vara att en elev lärt sig att 3+4=8.

En annan undervisningsform som, enligt Lundgren, kan leda till matematiksvårigheter hos elever är lotsning av läraren. Eleven förs då fram till rätt svar genom att besvara lärarens frågor istället för att själv analysera problemet och pröva sig fram. Lotsning är vanligt förekommande i undervisningssituationer och enligt Lundgren ökar förmågan att klara sig självständigt ytterst lite (Ahlberg, 1992). Detta kan vara skadligt då de elever som känner sig osjälvständiga och osäkra inom matematik, ofta är de som får problem vid beräkningar över tiotal. De binder ofta upp sig vid en formell lösningsstrategi och tappar tilltron till det egna tänkandet (Malmer, 2002).

Som tidigare nämnts är det viktigt att elever utvecklar en förståelse kring att talen är helheter bestående av olika stora delar. Enligt Ekeblad (1996) beror ofta elevers svårigheter i matematik på de tillvägagångssätt eleverna har vid addition och subtraktion. De elever som har svårigheter i matematik löser ofta matematiska problem genom att beräkna varje enhet. De saknar alltså denna förståelse av att tal kan ses som helhet bestående av delar.

# Metod

## Forskningsperspektiv

Vår studie kommer att vara influerad av ett fenomenografiskt perspektiv. Ett fenomenografiskt forskningsperspektiv innebär att deltagarna beskriver sina uppfattningar av sin omvärld. Syftet med denna forskningssansats är att lyfta fram variationer i deltagarnas uppfattningar. För att synliggöra deltagarnas tankar används ofta intervjuer som datainsamlings metod. Syftet med den fenomenografiska intervjun är att komma åt hur de intervjuade upplever och uppfattar sin omvärld. Avsikten är att synliggöra de intervjuades perspektiv på tillvaron. Intervjun består av öppna frågor utan givna svar. För att få ytterligare insikt om den intervjuades uppfattning ställs följdfrågor (Ahlberg, 1992).

Anledningen till att vi anser oss influerade av den fenomenografiska forskningsansatsen är att vi vill komma åt elevernas tankar, utan påverkan från oss. Syftet med vår studie är att lyfta fram elevernas olika sätt att lösa uppgifter över tiotalsgränser vid addition och subtraktion. För att göra detta har vi valt att använda oss av intervjuer som datainsamlingsmetod.

## Datainsamlingsmetod

Vi har valt att använda oss av en kvalitativ forskningsmetod i form av intervjuer. Vi har intervjuat 15 elever från tre olika skolor, syftet med dessa intervjuer var att synliggöra hur eleverna löste uppgifter vid tiotalsövergångar vid addition och subtraktion. De tre skolorna där vi utförde våra intervjuer har vi valt att kalla A, B och C. Dessa tre skolor ligger alla i utkanten av en mindre svensk stad. En av skolorna är en större, mångkulturell, skola. De övriga två skolorna är en mindre och en större lantsortsskola. Vi valde att genomföra intervjuerna på skolor där vi redan var kända för eleverna eftersom vi ville att intervjusituationen skulle bli så avspänd som möjligt, både för vår och elevernas del. Doverborg & Pramling Samuelsson (2000) skriver att om man har en god kontakt med barnen man intervjuar finns det större förutsättningar för att de berättar och delar med sig av sina tankar.

Vi har valt att använda oss av kvalitativa intervjuer som forskningsmetod eftersom vi vill på en djupare nivå komma åt elevernas upplevelser och tankar. Fördelen med att vi använder oss av intervjuer är att vi får möjligheter till djupare förståelse för hur dessa elever tänker. Vi har, som Starrin & Svensson (red.) (1994) kallar det, en empatisk ambition med våra intervjuer. Med empatiska ambitioner menar de att de forskare som använder sig av kvalitativa metoder vill komma åt människors inlevelse och subjektiva upplevelser. Magne Holme & Krohn Solvang (1997) menar att kvalitativ data ger en helhetsbild, den leder till förståelse för sociala processer och sammanhang. Enligt dem skapar kvalitativa undersökningar material till teorikonstruktion. Magne Holme & Krohn Solvang menar att en kvalitativ undersöknings planering och genomförande kännetecknas av att forskaren i minsta mån ska vara styrande samt eftersträva öppenhet för ny kunskap och ny förståelse.

Johansson & Svedner (2006) menar att den kvalitativa intervjun ger intressanta och lärorika resultat om elevens attityder, förkunskaper, värderingar och intressen. Intervjun som sådan vidgar även lärarens syn på elever, undervisning, förhållningssätt, målsättningar och planering. Författarna menar även att intervjuer ger kunskap som är användbar i läraryrket. Vi anser att våra intervjuer kommer att leda till ökad kunskap om elevers olika sätt att använda sig av huvudräkning. Detta kan vara användbart i vår framtida yrkesroll.

Enligt Krag-Jacobsen (1993) förmedlar en intervju kunskap, upplevelser, erfarenheter, åsikter, attityder och värderingar. Med hjälp av en intervju blir en individs tankar och upplevelser synliggjorda för andra individer. Genom att använda sig av en intervju kan tankar synliggöras som kanske varken respondent, intervjuare eller den som tar del av intervjun, kommit fram till på egen hand.

Vi anser att vi har en intervjutyp som enligt Bell (1995) kallas för den styrda eller den fokuserade intervjun. Denna typ av intervju ger respondenten utrymme att prata runt frågorna och ge uttryck för sina tankar inom gränserna för intervjuns struktur. Vår intervju har en tydlig struktur med färdiga frågor som enbart har ett rätt svar men som ändå kräver att eleverna klargör sina tankar för att komma fram till svaret så att vi som forskare kan få ny kunskap och ny förståelse. Alltså frågorna ger eleverna utrymme att ge uttryck för sina tankar. När man använder sig av den styrda eller den fokuserade intervjun görs, enligt Bell, en struktur eller ram för intervjun i förväg för att på så sätt underlätta när man ska genomföra analysen.

## Etiska riktlinjer

Enligt det humanistiska och samhällsvetenskapliga rådet finns fyra huvudkrav för etik som man måste ta hänsyn till när man genomför en forskning om människor. Vi kommer nedan att presentera dessa fyra huvudkrav och hur vi tagit hänsyn till dessa vid insamlingen och behandlingen i vår studie.

- Informationskravet

Forskaren måste informera deltagaren om undersökningens syfte samt beskriva hur studien i stora drag ska genomföras. Deltagaren bör även informeras om dennes uppgift i projektet och om vilka villkor som gäller för dennes deltagande. Exempel på sådana villkor är att deltagaren ska veta att medverkan är frivillig och kan avbrytas närhelst denne vill. Deltagaren ska även underrättas om att de uppgifter som denne lämnar endast kommer att redovisas i forskningssyfte. Annan information som ska finnas med är projektansvarigs namn och dennes instutitionsanknytning, eventuella risker för obehag och skada som kan uppkomma i samband med deltagandet samt informera om hur och var det färdiga projektet kommer att redovisas. Detta krav har vi uppfyllt genom att skicka ut ett missivbrev till eleverna och deras föräldrar (Bilaga 1). I missiven informerade vi om syftet med vår studie och hur studien skulle genomföras. Vi upplyste även eleverna muntligt om att deltagandet i studien var frivilligt och att intervjun kunde avbrytas om eleven så ville.

- Samtyckeskravet

Forskaren måste ha deltagarens samtycke och om deltagaren är under 15 år bör forskaren även ha vårdnadshavarens samtycke. Detta gäller om undersökningen är av etisk känslig karaktär. Den medverkande får själv bestämma hur länge denne vill medverka och på vilka villkor. Om deltagaren väljer att avbryta medverkan får det inte leda till negativa följder. Man får som forskare dock använda sig av det redan insamlade materialet om personen men om denne begär att uppgifterna ska strykas bör så ske. Eftersom de elever vi intervjuade var under 15 år fick föräldrarna, genom missivbrevet, godkänna om deras barn tilläts delta i studien. Eleverna fick sedan själva avgöra om de ville delta.

- Konfidentialitetskravet

Detta krav innebär att alla uppgifter ska antecknas, lagras och avrapporteras på ett sådant sätt att ingen enskild individ i studien kan identifieras av obehöriga. Det är här viktigt att utgå från att den deltagande inte ska känna sig kränkt av studien. Vi har uppfyllt detta krav genom att, vid anteckningar, lagring och avrapportering av våra intervjuer, undvika att nämna deltagarnas namn. Detta har undvikits genom att eleverna numrerats 1-15. Det material som samlats in i form av videoupptagningar har förvarats på så sätt att inga obehöriga kunnat ta del av dessa.

- Nyttjandekravet

Det insamlade materialet får endast användas för forskningsändamål. Materialet får inte användas eller lånas ut för kommersiellt bruk. De personuppgifter som samlats in får inte användas för beslut eller åtgärder (exempelvis tvångsintagning) som påverkar deltagaren. Vi har uppfyllt detta krav genom att endast använda vår insamlade data till det ändamål som delgivits deltagarna och deras föräldrar.

## Urval

Vårt mål med studien var att undersöka vilka lösningsstrategier elever i de tidiga skolåren använder sig av. Vi ansåg därför att elever i år två var en lämplig grupp att undersöka. Dessa elever har tillräckliga kunskaper att kunna utföra beräkningar över tiotalsgränser i både addition och subtraktion. Vid vår granskning av några skolors lokala mål har de även framgått att elever i år två ska ha tillräckliga kunskaper att kunna tillämpa beräkningar med tiotalsövergångar.

Vi kontaktade tiotalet skolor i tvåstadsområdet för att undersöka om de ansåg det rimligt att elever i år två skall klara tiotalsövergångar vid addition och subtraktion. Vi fick svar från två av dessa, och de ansåg att detta var ett rimligt mål i år två. För att ytterligare undersöka detta sökte vi information kring olika skolors lokala mål i matematik via Internet. De flesta skolor som har skrivit ut sina lokala mål anser att det är mycket rimligt att eleverna ska klara tiotalsövergångar inom både addition och subtraktion i år två.

Innan vi intervjuade eleverna för vår studie lämnade vi ut ett missivbrev som alla elever fick ta med sig hem. I missivbrevet kunde föräldrar och elever bland annat läsa studiens syfte och godkänna huruvida deras barn fick deltaga eller inte. När vi sedan fått tillbaka alla missbrev gjorde vi ett slumpmässigt urval, genom lottdragning, vilka fem elever i varje klass som skulle delta. I en av klasserna hade endast fyra av eleverna fått godkännande från föräldrar och elever så i detta fall behövdes således ingen lottning.

## Genomförande

Eleverna fick under intervjun 20 addition- och subtraktionsuppgifter (tio av varje) med varierande svårighetsgrad. Dessa var:

| Addition | Subtraktion |
| --- | --- |
| 3+1 | 5-2 |
| 2+3 | 6-3 |
| 4+4 | 8-4 |
| 6+4 | 10-1 |
| 9+2 | 11-3 |
| 3+8 | 15-7 |
| 19+2 | 23-4 |
| 12+9 | 32-5 |
| 33+8 | 44-16 |
| 97+7 | 202-7 |

Vi började med något lättare uppgifter för att göra eleverna bekväma och avslappnade i situationen. Sedan övergick vi till uppgifter med tiotalsövergångar som i vårt fall var det relevanta. Det var endast dessa sex sista uppgifter inom varje räknesätt som vi valde att använda vid vår analys, eftersom det var dessa som innehöll tiotalsövergångar.

Samtidigt som eleverna löste uppgifterna fick de muntligen berätta hur de tänkte. Bergius & Emanuelsson (2000) menar att samtala enskilt med eller intervjua barn är nödvändigt för att få kunskap om hur ett barn resonerar kring olika fenomen. Olsson (2000) skriver att det spelar stor roll hur vi vuxna bemöter elevernas frågor, svar och lösningar. Elever som ofta får höra att de svarar fel slutar snart tänka själva och frågar istället efter hur de ska göra. Vi rättade inte eleverna när de svarat fel då rätt svar från eleverna inte var relevant för studien. Det relevanta var att se vilka lösningsstrategier de använde samt vilka av dessa strategier som var mest framgångsrika.

Vi utförde våra intervjuer enskilt på varsin skola. Dessa intervjuer filmades eftersom vi alla tre ville se hur eleverna gjorde när de löste uppgifterna. Enligt Heikkilä och Sahlström (2003) hjälper videoupptagningar forskaren att reflektera över sina intervjuer. Eftersom vi utfört intervjuerna en och en blev det lätt att, med hjälp av filmerna, ta del av varandras intervjuer. Vi har även sett på de filmade intervjuerna exempelvis när eleverna tagit hjälp av konkret material eller hur de gjort när de räknat på fingrarna. Vi har även hjälpts åt att tolka vilka lösningsstrategier eleverna använt. Om vi enbart använt oss av ljudinspelare vid intervjuerna hade vi missat dessa delar, som vi ansåg bidra till att vi fick ett bättre underlag för en senare tolkning av vad eleverna sagt och hur de agerat under intervjun. Dessutom har vi, eftersom vi inte behövde föra anteckningar under intervjuerna, koncentrerat oss mer på eleven och hans/hennes resonemang. Doverborg & Pramling Samuelsson (2000) skriver att är en fördel att spela in en intervju, eftersom man då slipper att anteckna och kan koncentrera sig på vad eleven säger. Man kan även iaktta elevens kroppsspråk, mimik och röstläge, vilket medför en djupare förståelse och mer material för analys. Det är även en fördel att ha intervjun inspelad vid analysen av datan.

Innan vi utförde vår empiriska studie hade vi tänkt använda oss av både aritmetiska – och benämnda uppgifter. Vi valde dock att endast använda oss av aritmetik uppgifter vid intervjutillfällena, detta för att begränsa vår studie och göra vår analys av materialet enklare. Hade vi använt oss av båda uppgiftstyperna hade vi inte bara sett vilka lösningsstrategier barnen använder utan också sett om dessa skilde sig vid aritmetiska– och benämnda uppgifter. Vi hade också kunnat använda oss av enbart benämnda tal men vi ansåg att de barn som inte kommit lika långt i sin läsutveckling kunde då missgynnas och deras resultat vara missvisande för studien.

## Validitet och reliabilitet

Wallén (1996) menar att validitet innebär att resultatet av studien stämmer överens med vad den avsågs undersöka, det vill säga att syftet stämmer överens med resultatet. Vi anser att vår studie har hög validitet, då syftet överrensstämmer med studiens resultat. Vårt syfte med studien var att undersöka vilka lösningsstrategier som elever i år två använder sig av. Våra intervjuer och analyser stämmer överens med detta syfte.

Kvale (1997) skriver att reliabilitet handlar om studiens tillförlitlighet. För att studien ska få hög reliabilitet bör felfaktorer och subjektiva bedömningar i största mån undvikas (Befring, 1994). Vi har undvikit subjektiva bedömningar genom att ta del av varandras videoinspelade intervjuer vid analysen av dessa. På detta sätt har vi kunnat hjälpas åt att analysera intervjuerna och se varje intervju med nya ögon.

Enligt Kvale (1997) ger öppna frågor högre reliabilitet. Även om vi inte använt oss av öppna frågor eftersom det endast finns ett rätt svar på våra intervjufrågor, så anser vi att vårt tillvägagångssätt har varit öppet. Detta på grund av att det finns fler än en väg till rätt svar och det är just den vägen till svaret som är intressant för vår studie. Vi har undvikit att påverka eleverna att tänka på ett visst sätt och försökt föra ett samtal snarare än en intervju.

Wallén (1996) menar att en studie med hög reliabilitet är fri från slumpmässiga fel. Slumpmässiga fel som skulle kunna påverka vår studie är elevernas dagsform, problem i hemmiljön, vilken tidpunkt intervjun utfördes (innan/efter lunch) och så vidare. Doverborg & Pramling Samuelsson (2000) menar att tidpunkten för intervjun är av betydelse. Om en elev är trött eller blir avbruten i sin aktivitet, kan det vara svårt att få eleven motiverad och intresserad av en intervju. Vi anser att vår studie är tillförlitlig eftersom vi har viss förkunskap om de intervjuade elevernas matematiska kunskaper. Dessa förkunskaper grundar vi på att vi känner eleverna eftersom vi följt dem under en tid. De svar vi fick av eleverna stämde i stort sätt överens med vår förkunskap.

# Resultat

I detta avsnitt kommer vi att redovisa de resultat som framkommit av våra intervjuer. När vi skulle sammanställa vårt empiriska material delade vi först in elevernas svar efter strategier som vi själva såg. Vi fick då många olika lösningsstrategier och såg mönster med de strategier som Ahlberg (1992) och Ostad (1999) presenterar. Vi har valt att istället utgå från de lösningsstrategier som används av Ahlberg (1992) då benämningarna på dessa var mer sammanfattade och lättare att förstå. Vi har vid addition även lagt till kategorierna uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel, tiotal och ental beräknas var för sig med hjälpmedel, omgestaltning av talen med hjälpmedel, ingen uttalad lösningsstrategi samt inget svar. Även vid subtraktion har vi utgått från Ahlbergs kategorier, men bytt ut uppräkning på talsekvensen mot Ostads (1999) subtraktionsstrategier tillväxt- och minskningsstrategin. Vi har även lagt till kategorierna tillväxtstrategin med hjälpmedel, minskningsstrategin med hjälpmedel, omgestaltning med hjälpmedel, ingen uttalad strategi samt inget svar. Orsaken till att vi lagt till kategorierna med hjälpmedel är att vi tidigare definierat effektiva lösningsstrategier som de strategier där eleverna kan lösa mer komplicerade uppgifter utan att använda hjälpmedel. För att kunna undersöka vilka lösningsstrategier som är effektiva behöver vi därför se vilka av strategierna eleverna behöver använda hjälpmedel vid.

Med hjälpmedel menar vi det konkreta material som eleverna försågs med. Vi använde oss av ett konkret material som eleverna redan var bekanta med. De hjälpmedel eleverna använde sig av var centimo-materiel, pärlor och pengar. Pärlorna som användes i en av skolorna liknar till stor del centimo-matrielet, den enda skillnaden är att det var pärlor och materialet bestod av ytterligare några satser. Vid vår granskning av litteratur har vi haft svårt att finna exempel på hur man kan använda pengar till detta ändamål. Löwing & Kilborn (2003) visar dock olika exempel på hur man kan konkretisera matematiska uppgifter med hjälp av pengar. De talar bland annat om hur man kan använda pengar som komplement för att förtydliga den associativa lagen, men det tar inte upp något exempel på hur man kan använda pengar vid tiotalsövergångar. Som hjälpmedel menar vi även att räkna på fingrarna eller använda sig av papper och penna.

När alla intervjuer var genomförda skrev vi var och en ordagrant ner sina intervjuer. För att på enklast sätt kunna analysera vårt empiriska material klippte vi i isär elevernas svar och klistrade sedan ihop svaren uppgift för uppgift. Vi fick då alla elevernas svar på exempelvis 8+3 på ett papper. Så gjorde vi med alla uppgifter för att få en överblick på alla svaren och därefter kunna urskilja likheter och skillnader. Vi förde sedan samman våra insamlade data i två tabeller över olika lösningsstrategier. Den första representerar additionsstrategierna och den andra subtraktionsstrategierna. Tabellerna består av sju kolumner. Den första kolumnen beskriver de olika lösningsstrategier utifrån vilka vi delat in elevernas lösningar i. Resterande sex kolumner visar elevernas val av lösningsstrategi vid varje enskild uppgift. Eleverna är numrerade 1-15 där elev 1-6 är från skola A, 7-11 är från skola B och elev 12-15 från skola C. De elever som markerats med * innebär fel svar från eleven. Varje elev förekommer endast en gång per kolumn, då de endast använder en lösningsstrategi.

I tabellen additionsstrategier saknas elev 1 vid uppgiften 12+9. Detta på grund av att denna uppgift missades vid intervjutillfället.

## Additionsstrategier

| | **9+2** | **3+8** | **19+2** | **12+9** | **33+8** | **97+7** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Uppr. på talsekvensen** | 2, 9, 11, 13, 14 | 2, 4, 5, 6, 13, 14 | 5, 6, 9, 13, 14, 15 | | | |
| **Uppr. på talsekvensen m. hjälpmedel** | | 12 | | 4, 7, 8, 12*, 13, 15 | 7, 12*, 13, 15 | 7, 8, 12*, 13 |
| **Inlärda talfakta** | 3, 4, 7, 8 | 1 | 2, 4 | 14 | | |
| **Tiotal & ental beräknas var för sig** | | | 3 | 3, 5 | 2, 3, 4, 9, 14 | 1, 2*, 3, 4, 5*, 9, 14* |
| **Tiotal & ental beräknas var för sig m. hjälpmedel** | | | | | | |
| **Visuella bilder av en uppst.** | | | 12 | | | |
| **Användning av ”dubblor”** | | | | | | |
| **Omgest. av talen** | 1, 5, 6, 10, 12 | 3, 7, 8, 9, 10, 11* | 1, 7, 8, 10, 11 | 2, 6, 9, 10 | 1, 6, 8, 10 | 10 |
| **Omgest. av talen m. hjälpmedel** | | | | 11 | 11 | 11 |
| **Ingen uttalad strategi** | 15 | 15 | | | 5 | 6, 15 |
| **Inget svar** | | | | | | |

*Figur 1. Lösningsstrategier och svar vid addition*

För att förtydliga hur vi valt att kategorisera elevernas svar, kommer vi här nedan att ge exempel på elevsvar utifrån varje strategi. Vid kategorierna tiotal och ental beräknas var för sig med hjälpmedel, användning av ”dubblor” samt inget svar ges inget exempel, då ingen elev använt sig av dessa.

**Uppräkning på talsekvensen**

I – Då tar vi talet 9+2
E9 – 11
I – Ja, hur tänkte du då?
E9 – Jag tänkte det inne i huvudet. Alltså så här 1 och 2 och då blir det ju 10 och 11

**Uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel**

I - Den här då, 12+9.
E13 - (räknar med fingrarna i knäet) 22.

I - 22, hur räknade du då?
E13 - Jag tog 12.. (räknar under bordet igen.) Nej 21!
I - 21, och då räknade du på fingrarna?
E13 - Ja.

**Inlärda talfakta**

I – Bra. 9 + 2 då?
E7 – 11. Jag lade på 2 på 9.

Här svarar eleven snabbt, utan att tänka efter. Vi anser att detta tyder på att eleven kan uppgiften 9+2 utantill och tolkar därför inte detta som uppräkning på talsekvensen.

**Tiotal och ental beräknas var för sig**

I – Så tar vi det sista plus talet och det är 97+7
E9 – (Funderar) 97+7?
I – Ja
E9 – Då blir det 114
I – Okej. Hur tänkte du nu?
E9 – Jag tänkte att 7+7 är ju 14 och sen hade jag 90 kvar och då måste det bli 100 också hade jag 4 då och det blir 114. Eller du 104 blir det ju. Ja det blir det 104.

**Visuella bilder av en uppställning**

I - Och då blir det elva. Då tar vi lite större tal. Då tar vi 19+2.
E12 - Tjugoett.
I - Tjugoett. Hur tänkte du då?
E12 - Jag tänkte bara, tar jag tvåan där (pekar på talet 19). Nej tar jag tvåan där och ettan där (pekar först på tiotalet, sedan entalet).
I - Hur tänkte du? Du tar tvåan där? (pekar på tiotalet)
E12 - Jag tar tvåan där (pekar på tiotalet igen)
I - Du kan kanske skriva på ett papper?
E12 - Mm. (tar ett papper). Tittar här. Nu 19, därför, nu 19 där och sen istället för 19 där så tar jag ett där och istället för ett där så tar jag två där.

Eleven antecknar här på ett papper och visar hur hon först beräknar entalen, 9+2 och sedan tiotalen, 10+10 men i detta fall som 1+1. Anledningen till att vi valt att tolka elevens lösningsstrategi som visuella bilder av en uppställning och inte tiotal och ental beräknas var för sig är att eleven, på pappret, visar hur hon tänker sig tvåan under talet 19, alltså i form av algoritmen uppställning.

**Omgestaltning av talen**

I – 33+8.
E10 – Om man har 33 så plussar man på 7 från 8 och då blir det 1 kvar av 8 så det blir 40 också plussar man då på en till och då blir det 41.
I – Varför väljer du just att ta 7 när du har 33?
E10 – Därför att 7 och 3 är tio kompisar och då saknas bara en 7:a för att det ska bli 40.
I – Just det.

E10 – Men istället blev det 41 med en 8:a.
I – Okej.

**Omgestaltning av talen med hjälpmedel**

I – 33+8?
E11 – (Räknar på fingrarna) 42.
I – Ja, hur tänkte du då?
E11 – Jag tänkte först tar jag det ena talet och sen tar jag det andra och då delar jag på det.
I – Vilket är det ena talet?
E11 – Först tog jag 33 och sen tar jag 4 och sen 4 igen.
I – Så du tar 33 först?
E11 – Ja, och sen delar jag den andra.
I – Du delar 8 i 2.
E11 – Ja.
I – Och sen tar du en del åt gången?
E11 – Ja.

**Ingen uttalad strategi**

I. – Okej. 97+7?
E6 – 106?
I. – Skriv upp talet på pappret.
E6 - (Barnet skriver). 104, jag tänker i huvudet bara.
I – Hur gör du när du tänker i huvudet?
E6 – Jag kan inte förklara, jag bara tänker i huvudet.

Vi kan inte, utifrån elevens svar, urskilja någon lösningsstrategi. Man skulle kunna tolka elevens svar som inlärda talfakta, men vi anser att 97+7 är en för avancerad uppgift för en elev i år två.

## Subtraktionsstrategier

| | 11-3 | 15-7 | 23-4 | 32-5 | 44-16 | 202-7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tillväxtstrategin** | | | | | | |
| **Tillväxtstrategin med hjälpmedel** | | | | | | |
| **Minskningsstrategin** | 1, 5, 6, 9*, 11, 14*, 15 | 1 | 4, 5, 6, 9, 13* | 1, 4, 6 | | 1, 4 |
| **Minskningsstrategin med hjälpmedel** | 7, 13* | 7, 8, 11, 12 13*, 15 | 7 | 5, 8,12*, 13*, 15 | 10*, 11, 12*, 13, 15 | 5, 6*, 7, 8, 12, 13*, 14 |
| **Inlärda talfakta** | 8 | 3 | | | | |
| **Visuella bilder av en uppställning** | | | | | | |
| **Användning av ”dubblor”** | | 2, 4 | | | | |
| **Omgest. av talen** | 2, 3, 4, 10 | 6, 9, 10, | 1, 2, 3, 8, 10, 11, 12*, 14 | 2*, 3, 7*, 9, 10*, 11, 14 | 1*, 3, 4*, 5, 6, 7*, 8, 9* | 3, 9 |
| **Omgest. av talen m. hjälpmedel** | | 14 | | | 14 | 10 |
| **Ingen uttalad strategi** | 12 | | 15 | | | |
| **Inget svar** | | 5 | | | 2 | 2, 11, 15 |

*Figur 2. Lösningsstrategier och svar vid subtraktion*

Även här kommer vi att ge exempel på elevernas svar. Eftersom ingen elev använt sig av kategorierna tillväxtstrategin, tillväxtstrategin med hjälpmedel och visuella bilder av en uppställning, kan inga exempel ges på dessa.

**Minskningsstrategin**

I. – Ja. Okej, 11-3?
E1 – Då räknar jag 3 bakåt, 8.

**Minskningsstrategin med hjälpmedel**

I: 15-7.
E12: 15.. (lägger upp händerna på bordet). 15.. 14,13… 14,13,12,11,10,9,8.
I: Då räknar du neråt från 15, ja.
E12: Ja.

**Inlärda talfakta**

I – Okej. 11-3 då?
E8 – 8.
I – Ja. Hur tänkte du nu?

E8 – Jag tänkte bara i huvudet.
I – Bara i huvudet? Hur menar du då?
E8 – Det är ett sånt tal man bara vet.

**Användning av ”dubblor”**

I. – Ja, precis. 15-7?
E2 (Barnet skriver och tänker). – 8. Ett mindre än 15 är 14 och 7+7 är 14 och då borde det ju vara 1 mer än 7 det blir. Om det nu är 15 och det är 1 mer än 14 och då borde 7:an vara 1 mer och då är det alltså 8.

**Omgestaltning av talen**

I. – 23-4?
E2 – 19. Jag tänkte att 3, det är 1 mindre än 4. Det var ju 23 och då borde det alltså vara 1 mindre än 20 bara för att det är 1 mer än 3. Då är det mindre än 20 för det får ju inte plats där emellan.

**Omgestaltning av talen med hjälpmedel**

I – Nej det är okej. Då tar vi nästa tal som är 202-7.
E10 – (Tar fram två hundra plattor och två entalsklossar) Här är 202 och så tar jag bort 2 från 7. Då är det bara 200 kvar, sen minskar jag 3. Nej förresten, sen minskar jag 5 så det bara blir 197.
I – Hur tänkte du nu då? Vad tog du bort först?
E10 – 2.
I – Från?
E10 – (Pekar på klossarna)
I – Från 202?
E10 – Ja. Sen tog jag bort 5 till för att det inte ska vara någonting kvar av 7 och då blir det 195.

**Ingen uttalad strategi**

I - Då tar vi ett lite större, 23-4.
E15 - Oj. Nnnnn… nitton.
I - (nickar) Hur tänkte du?
E15 - Eh.. Jag tänkte bara för att, min bror han hade 19 gubbar.
I - Han hade 19 gubbar?
E15 - (nickar). Nej först så hade han 23 och sen så tog han bort fyra och då blev det ju 19.
I - Hur visste du det?
E15 - Bara för att jag räknade dom

Eleven kan här inte förklara hur denne tänker. Svaret blir korrekt, men vi kan inte utröna någon lösningsstrategi ur elevens svar och tolkar därför detta som ingen uttalad strategi.

**Inget svar**

I – Då tar vi det sista talet som är 202-7

E11 – 202-7?
I – Ja. Talet är 202-7
E11 – (Tar fram hjälpmaterialet, först 2 hundraplattor och sedan 2 entalsklossar) nu har jag 202. (Försöker laborera med talen fram och tillbaka, blir frustrerad) jag kan inte detta.
I – Tyckte du det var svårt?
E11 – Ja, jag har inte räknat ett så högt minustal innan.

# Analys

Vi har sökt mönster i elevernas val av lösningsstrategier men vid analysen av våra insamlade data har vi inte funnit att någon enskild lösningsstrategi markant förekommer mer än någon annan. Vi har inte kunnat uttyda något tydligt mönster i elevernas beräkningar. Vi har ändå kunnat urskilja vissa mönster i elevernas svar. Dessa mönster kommer vi att redogöra i detta avsnitt. Vi har delat in vår analys efter de fem frågeställningar som vår studie utgår ifrån.

Vilka lösningsstrategier använder eleverna vid tiotalsövergångar i addition?

De strategier som elever använder sig av vid tiotalsövergångar inom addition är uppräkning på talsekvensen, uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel, inlärda talfakta, tiotal och ental beräknas var för sig, visuella bilder av en uppställning, omgestaltning av talen och omgestaltning av talen med hjälpmedel. Vid några svar från eleverna har vi inte kunnat identifiera någon uttalad strategi.

Vi har sett att strategin visuella bilder av en uppställning enbart används av en elev en gång. Att den här strategin endast används en gång tror vi kan bero på att man idag inte räknar lika mycket med algoritmer som man tidigare gjort. Det kan också bero på att eleverna går i år två och att läraren inte gått igenom hur man räknar med algoritmer. Löwing & Kilborn (2003) nämner att algoritmer var ett nödvändigt redskap för att kunna beräkna komplicerade aritmetiska uppgifter innan miniräknaren fanns tillgänglig. De traditionella algoritmer som förr lärdes ut i skolan är idag ovanliga. Vi tror att eleven som använder sig av strategin visuella bilder av en uppställning lärt sig detta i hemmet. Detta tror vi eftersom de inte arbetat med algoritmer tidigare i den klass som eleven går i.

**Vilka lösningsstrategier använder eleverna vid** tiotalsövergångar i **subtraktion?**

De strategier som elever använder sig av vid tiotalsövergångar inom subtraktion är minskningsstrategin, minskningsstrategin med hjälpmedel, inlärda talfakta, användning av ”dubblor”, omgestaltning av talen, omgestaltning av talen med hjälpmedel. Vid några svar från eleverna har vi inte kunnat identifiera något uttalad strategi. Vid en del uppgifter har vi inte fått något svar från alla elever. Vi tror att vi inte fick något svar från dessa elever på grund av att dessa uppgifter var för komplicerade för dem.

Vilka av dessa lösningsstrategier använder de elever som löser uppgifterna korrekt?

Vi har sett att de additionsstrategier där alla elever som använder sig av strategierna uppräkning på talsekvensen, inlärda talfakta, visuella bilder av en uppställning och omgestaltning av talen med hjälpmedel löser uppgifterna korrekt. Vi anser inte att dessa strategier är effektiva då dessa överges när uppgifterna blir mer komplicerade.

Vid subtraktionsstrategier löser alla elever som använder sig av strategierna inlärda talfakta, användning av ”dubblor” och omgestaltning av talen med hjälpmedel uppgifterna korrekt. Även här ser vi att dessa strategier överges när uppgifterna blir av mer komplicerad karaktär.

### Vilka av dessa lösningsstrategier använder de elever sig av som löser uppgiften felaktigt?

De strategier där några elever löser uppgiften felaktigt inom addition är uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel, tiotal och ental beräknas var för sig samt omgestaltning av talen.

De subtraktionsstrategier som används när eleverna löser uppgifterna felaktigt är minskningsstrategin, minskningsstrategin med hjälpmedel och omgestaltning av talen.

Vi ser i vår studie att talet 44-16 är den uppgift som är svårast för barnen. Det är även den enda av de tolv uppgifter som eleverna fick beräkna som innehåller två tiotalsövergångar. Vi anser att elevernas svårigheter med denna uppgift beror på att de ännu inte har tillräckliga matematiska kunskaper för att kunna utföra beräkningar över två tiotal. Vid vår granskning av skolornas lokala mål i matematik ansågs det rimligt att elever i år två kan utföra beräkningar över tiotalsgränser. Denna uppgift, 44-16, är dock av det svårare slaget. Sex av eleverna löste uppgiften felaktigt och en elev gav inget svar alls. Vi ser dock att fler än hälften av eleverna, åtta stycken, löste uppgiften korrekt. Av dessa åtta använde sig fem av strategin omgestaltning av talen eller omgestaltning av talen med hjälpmedel.

De flesta av eleverna har inte några effektiva strategier när de kommer till de svårare uppgifterna. Detta anser vi då vi kan se att många elever, vid dessa uppgifter, tog till det hjälpmedel som fanns tillgängligt. Vi ser även att många av eleverna tar till hjälpmedel vid den sista subtraktionsuppgiften, 202-7. Detta tror vi kan bero på att eleverna låser sig eftersom det är ett högre tal av svårare karaktär. Det är även det enda av de tolv talen som innehåller hundratal.

Vi kan också se att den elev som svarat fel flest gånger, elev 12, är den elev som använt sig av minskningsstrategin och minskningsstrategin med hjälpmedel. Exempelvis har elev 12, till största del, använt sig av strategin uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel vid addition. Vid subtraktionsberäkningarna har eleven, till största del, använt sig av minskningstrategin med hjälpmedel. Elev 12 och 13 verkar inte ha utvecklat sina strategier då de, i stort sett, håller sig till strategierna minskningsstrategin och minskningstrategin med hjälpmedel vid subtraktion och strategierna uppräkning på talsekvensen och uppräkning på talsekvensen med hjälpmedel vid addition. När de beräknar subtraktionsuppgifterna använder de sig av minskningsstrategin vid de lättare talen och minskningsstrategin med hjälpmedel vid de svårare talen. Vid additionsberäkningarna använder de sig av strategin uppräkning på talsekvensen vid de lätta talen och samma strategi vid de svåra talen fast med hjälpmedel.

Vi ser att de elever som använder sig av minskningsstrategin vid de lättare talen, använder sig av samma strategi vid de svårare talen fast med hjälpmedel. Vi tror att dessa elever inte har utvecklat sina huvudräkningsstrategier längre än till nivån för minskningsstrategin.

Minskningsstrategin är enligt vår studie och annan litteratur inte en utvecklingsbar strategi. Den slutsatsen drar vi eftersom de, vid de svårare talen, använder sig av samma strategi fast med hjälpmedel. Även Ostad (1999) menar att eleverna ofta använder sig av konkreta hjälpmedel vid denna strategi.

Vi anser att detta tyder på att minskningsstrategin vid subtraktion och uppräkning på talsekvensen vid addition, inte är effektiva och utvecklingsbara lösningsstrategier. Detta eftersom eleverna behöver ta till hjälpmedel när beräkningarna blir för avancerade.
Är någon av dessa strategier mer effektiv?

Däremot tyder vår studie på att omgestaltning av talen är en effektiv lösningsstrategi. Vi har sett att de elever som använder denna strategi sällan tar till hjälpmedel och löser ofta uppgifterna korrekt. De felaktiga svar som ändå förekommer tolkar vi som ”slarvfel”, det vill säga enklare småfel. Detta mönster stämmer överens med det som Ahlberg (1992) fann i sin studie. Hon menar att lösningsstrategin omgestaltning är mest effektiv då eleven, med denna strategi, kan tänka i olika talkombinationer. Enligt Neuman (1993) är det viktigt att elever lär sig de 25 talkombinationer som de tio första talen består av. Kan man dessa, så har man även en god beredskap för att kunna utföra beräkningar över tiotalsgränser. Även Piaget (1972) poängterar att för att kunna förstå de fyra räknesätten måste man ha en förståelse för att talen består av delar. De elever som omgestaltar talen vid beräkningen har lärt sig, kanske inte alla men några av de 25 kombinationer som Neuman nämner, samt hur man använder denna kunskap vid addition och subtraktion. De elever som använder sig av minskningsstrategin och lösningsstrategin uppräkning på talsekvensen, använder sig inte av den kunskapen. De räknar bara samman eller tar bort ett tal till, eller från, det andra genom att räkna upp, eller ner, på talsekvensen. De har ändå den grundläggande förståelsen, som Piaget nämner, att tal består av delar. Hade de saknat denna förståelse, hade de inte kunnat dela upp talen för att kunna räkna upp på talsekvensen. De hade då enbart sett exempelvis talet 3 som en helhet. De hade då saknat förståelsen av att 3 kan delas upp i 3 lika stora delar som sedan kan läggas till exempelvis talet 8 för att nå ett större tal, det vill säga 3+8=11.

Ahlberg (1992) fann, i sin studie av elever i år tre, att många elever saknade effektiva beräkningsmetoder för huvudräkning. Som vi beskrev tidigare, menar Ahlberg att användande av hjälp, såsom beräkning med hjälp av papper och penna, kan undvikas om eleven lär sig strategier som är utvecklingsbara. Eleverna i vår studie är ännu nybörjare inom området matematik. För att kunna fortsätta att utvecklas behöver de mer coachning från pedagoger. De behöver lagra, i långtidsminnet, fler av de 25 talkombinationer som Neuman (1993) menar är viktiga för att utvecklas inom matematiken. Lösningsstrategierna uppräkning på talsekvensen samt minskningsstrategin är ännu användbara för eleverna, men ju mer avancerad matematiken blir desto mindre effektiva blir dessa.

Löwing & Kilborn (2003) menar att man, för att kunna utvecklas inom addition, bör förstå och kunna använda sig utav den kommutativa lagen. Vi har, i vår studie, sett att eleverna använder sig av denna lag. Oftast sker detta när de ska beräkna additioner där det första talet är det lägsta för att på så sätt beräkna det största talet först. Exempelvis vid uppgiften 3+8, där eleverna istället utför beräkningen 8+3. En elev använder sig även av den kommutativa lagen vid additionen 12+9. Uppgiften innan var 19+2 och eleven såg då sambandet mellan dessa två uppgifter. Vid additionen 12+9 ser vi att eleverna slutar använda sig av strategin uppräkning på talsekvensen. Antingen tar de till hjälpmedel eller använder sig av någon av strategierna tiotal och ental beräknas var för sig eller omgestaltning. Endast en elev ser sambandet mellan 19+2 och 12+9. Vi anser att anledningen till att eleverna skiftar strategi, fast uppgifterna i sig är likartade, är att de inte ser sambandet mellan uppgifterna och att nio är för många steg att beräkna i huvudet utan att ta till hjälpmedel. En annan tänkbar förklaring till att få elever ser sambandet mellan 19+2 och 12+9 kan vara att eleverna är fokuserade på den uppgift som de för tillfället beräknar. De glömmer då den uppgift de nyss löst. Detta tror vi dock inte är förklaringen då flera av eleverna senare ser samband mellan 8-3 och 11-3.

Vi anser att pengar är ett mindre bra konkret material vid beräkning över tiotalsgränser vid subtraktion. Två elever av de fyra elever som använde sig av pengar hade svårigheter att förstå pengarnas värde. En elev behövde vid uppgiften 202-7 växla en hundralapp.

E13 - Jag växlar den (tar en hundra lapp).
I - Mm hur mycket får du?
E13 - hundra enkronor.
I - 101 kronor för den? Hundra Enkronor, jaha! Men det har vi inte ska vi testa med tiorna istället då.
E13 - Nej det kommer inte gå.
I - Kommer det inte gå?

Eleven förstår att hundra kronor kan växlas mot hundra enkronor men saknar kunskapen om att hundra kronor och tio tior är lika mycket. Det blir därför svårt och tidskrävande för eleven att utföra beräkningen med hjälpmedlet pengar. Vi anser att med hjälp av ett mer konkret och tydligt hjälpmedel, exempelvis Centimo-materielet, hade eleven haft lättare att lösa denna uppgift. Eftersom eleven har svårigheter att förstå pengars värde i förhållande till varandra, krävs en del handledning från en pedagog för att kunna lösa beräkningar med det hjälpmaterialet. Vi tror att pengar kan vara ett bra hjälpmedel när elever lärt sig växla pengarna och förstår deras värde.

## Diskussion

Tolkningen av elevernas svar har, i vissa fall, varit svår. Detta på grund av att elevernas svar inte varit så utförliga som vi trott och hoppats att de skulle vara. Det är ibland svårt för vissa elever att utrycka hur de gör när de tänker. Vi tror att det kan bero på att eleverna sällan brukar diskutera hur de tänker vid huvudräkning. Både Ahlberg (1992) och Löwing & Kilborn (2003) menar att det är viktigt att låta eleverna kommunicera matematik för att elevernas huvudräkning ska utvecklas. Man kan även läsa i kursplanen för matematik (Skolverket, 2000) att skolan skall sträva efter att eleverna utvecklar sin förmåga att argumentera för sitt tänkande. Skolan ska även ge eleverna möjligheter att kommunicera matematik. Piaget (1972) poängterar att för att eleverna ska utvecklas inom matematiken måste de stimuleras till att utforska och lära på egen hand. Han menar alltså att, man som lärare, bör undvika att ge eleverna färdiga lösningar.

En annan anledning till att vissa elever har svårt att förklara hur de tänker, kan vara att de känner sig hämmade och blir lite nervösa inför situationen. Eleven kan känna sig hämmad av att bli intervjuad av en vuxen samt att bli filmad. Detta hade kanske kunnat undvikas genom att istället filma två elever som diskuterar hur de går till väga när de löser olika uppgifter.

Ingen av eleverna tog vid addition till det konkreta hjälpmaterialet som fanns tillgängligt, istället använde de sig av fingrarna eller papper och penna. Vid subtraktion däremot använde några av eleverna det konkreta hjälpmaterialet. Vi tror att anledningen till detta är eleverna är mer vana vid att räkna addition. De är mer säkra på addition än subtraktion. Vi ser att eleverna är säkrare på att räkna uppåt än neråt på talraden. När de använder sig av konkretmaterial vid subtraktion räknar de först samman den term som ska subtraheras för att sedan ta bort det antal som ska subtraheras. Efter detta räknar de samman den summa som återstår, alltså uppräkning. Det första räknesättet eleverna möter i skolan är addition för att sedan övergå till subtraktion.

Vi anser att vårt urval är representativt. När vi samlat in missivbrevet lottade vi fram de elever som skulle delta i studien. Vi anser att vi på detta sätt undvikit att endast intervjua ”matematikälskande” elever.

## Fortsatt forskning

Vid våra diskussioner kring elevernas val av lösningsstrategier har vi även uppmärksammat att de tre skolornas arbetssätt skiljer sig åt. Två av skolorna, A och B, arbetar aktivt för att individualisera matematikundervisningen. Exempelvis har de flesta elever olika läroböcker. På den tredje skolan, C, arbetar däremot alla elever med samma läroböcker. Denna skola fokuserar mer på undervisning i svenskämnet, då många elever har annat modersmål än svenska. Vi har uppmärksammat att elevernas val av lösningsstrategier skiljer sig mellan de två skolorna som arbetar aktivt med matematikutvecklingen hos eleverna och den tredje där fokus mer ligger på svenskundervisningen. Vi ser att få av eleverna från skola A och B använder sig av de lösningsstrategier vi funnit mest effektiva, det vill säga omgestaltning av talen. Av eleverna från skola C är det få elever som använder sig av denna strategi. De använder sig istället oftare av de strategier som vi funnit minst effektiva, uppräkning på talsekvensen vid addition och minskningsstrategin vid subtraktion. En anledning till detta skulle kunna vara att eleverna från skola C har svårigheter att uttrycka hur de tänker. En annan möjlig förklaring till detta skulle kunna ligga i de olika arbetssätten. Eftersom den grupp av elever som haft mer individualiserad undervisning var fler än de som undervisats efter samma läromedel kan vi inte, utifrån våra resultat avgöra om de skilda arbetssätten avgjort elevernas val av lösningsstrategier.

Vi skulle därför finna det intressant att forska vidare kring hur arbetssätt påverkar elevers sätt att tänka och lösa matematiska uppgifter. Forskare och kursplaner förespråkar individualisering i matematiken. Finns det inte något värde i att använda läroböcker? Hur tillämpar lärare individualisering i praktiken? Varför har läroböcker fortfarande så stark ställning om det inte innehåller vad man eftersträvar? Vi skulle därför finna det intressant att undersöka och jämföra om elevernas val av lösningsstrategier skiljer sig åt mellan skolor med dessa olika arbetssätt.

# Referenser


Ahlberg, Ann (1992). *Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Ahlberg, Ann (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur

Befring, Edvard (1994). *Forskningsmetodik och statistik.* Lund: Studentlitteratur

Bell, Judith (1995). *Introduktion till forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur

Bergius, Berit & Emanuelsson, Lillemor (2000). Att stimulera barns intresse för och upptäckter i matematik. I *Nämnaren tema - Matematik från början*. (s.145-178). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Univ. (Nämnaren. Tema)

Doverborg, Elisabeth & Pramling Samuelsson, Ingrid (2000). *Att förstå barns tankar – Metodik för barnintervjuer.* Stockholm: Liber AB

Ekeblad, Eva (1996). *Children - learning - numbers: a phenomenographic excursion into first-grade children's arithmetic.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Heikkilä, Mia & Sahlström, Fritioj (2003). Om användning av videoinspelning i fältarbete i *Pedagogisk forskning i Sverige* Årgång nr 8 Nr 1-2

Høines, Marit Johnsen (2000). *Matematik som språk: verksamhetsteoretiska perspektiv.* 2. uppl. Malmö: Liber ekonomi

Johansson, Bo & Svedner, Per Olov (2006). *Examensarbetet i lärarutbildningen: undersökningsmetoder och språklig utformning.* Uppsala: Kunskapsföretaget

Krag Jacobsen, Jan (1993). *Intervju: konsten att lyssna och fråga.* Lund: Studentlitteratur

Kvale, Steinar (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur

Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo (2003). *Huvudräkning: en inkörsport till matematiken.* Lund: Studentlitteratur

Magne Holme, Idar & Krohn Solvang, Bernt (1997). *Forskningsmetodik :om kvalitativa och kvantitativa metoder.* Lund: Studentlitteratur

Magne, Olof (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan.* Lund: Studentlitteratur

Malmer, Gudrun (2002). *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur

Neuman, Dagmar (1993). *Räknefärdighetens rötter.* Stockholm: Utbildningsförlaget

Olsson, Ingrid (2000). Att skapa möjligheter att förstå. I *Nämnaren tema - Matematik från början*. (s.179-214). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Univ. (Nämnaren. Tema)

Ostad, Snorre (1999). *Elever med matematikkvansker*. Oslo: Unipub Forlag, Akademia

Piaget, Jean (1972). *Framtidens skola: att förstå är att upptäcka.* Stockholm: Forum

Skolverket. (2000). *Kursplaner och betygskriterier*. Grundskolan 2000.

Starrin, Bengt & Svensson, Per-Gunnar (red.) (1994). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori.* Lund: Studentlitteratur

Threlfall, John (2002). Flexible mental calculation i *Educational Studies in Mathematics,* 50, 29-47.

Unenge, Jan, Sandahl, Anita, Wyndhamn, Jan (1994). *Lära matematik.* Lund: Studentlitteratur

Unenge, Jan (1999). *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: -med mina ögon sett.* Stockholm: Natur och Kultur

Wallén, Göran (1996). *Vetenskapsteori och forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur

**Övriga referenser**

TIMSS 2003 (Trends in International Mathematics and Science Study) [Elektronisk] http://www.skolverket.se/publikationer?id=1380

Forskningsetiska principer inom humanistisk- samhällsvetenskaplig forskning [Elektronisk] http://www.vr.se/huvudmeny/forskningsetik/reglerochriktlinjer.4.2d2dde24108bef1d4a8800063.html

Hej!
Vi är tre lärarstudenter som läser på Högskolan Väst i Vänersborg. Vi har just påbörjat vårat examensarbete. Där vi kommer att undersöka vilka olika sätt barn i årskurs 2 löser matematiska uppgifter i addition och subtraktion.

Vi kommer att intervjua fem slumpvis valda elever i ditt barns klass. Inga personuppgifter kommer att användas i studien, ditt barn kommer att vara helt anonymt.

Vi undrar härmed om vi har er tillåtelse att intervjua ert barn. Var vänlig skicka tillbaka denna lapp innan 16/5.

Har ni några frågor vänligen kontakta……………………………………………...

Med vänliga hälsningar Sara Enetorp, Malin Bouweng och Emma Johansson

- □ Vi/Jag tillåter att mitt barn medverkar i studien
- □ Vi/Jag vill inte att mitt barn medverkar i studien

……………………………………………………….
Målsmans underskrift

……………………………………………………….
Barnets namn

**Högskolan Väst**
**Institutionen för individ och samhälle**
**461 86 Trollhättan**
**Tel 0520-22 30 00 Fax 0520-22 30 99**
**www.hv.se**